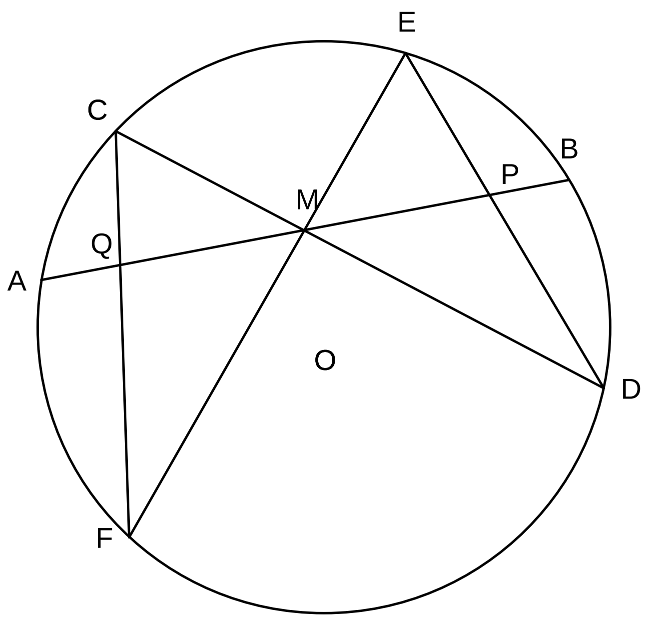
THEOREME DU PAPILLON

Enoncé du théorème :

Soit Γ un cercle de centre O et [AB] une corde du cercle Γ de milieu M. On considère deux cordes $[CD]$ et $[EF]$ du cercle Γ passant par M. Si les droites (ED) et (CF) coupent $[AB]$ respectivement aux points P et Q alors M est le milieu du segment $[PQ]$.



Quelques rappels :

Rappel 1 : Soit ABC un triangle, on a :

- ❖ $Aire(ABC) = AB \times AC sin\hat{A} = BA \times BC \times sin\hat{B} = CA \times CB \times sin\hat{C}$
- ❖ $\frac{sin\hat{A}}{BC} = \frac{sin\hat{B}}{AC} = \frac{sin\hat{C}}{AB}$

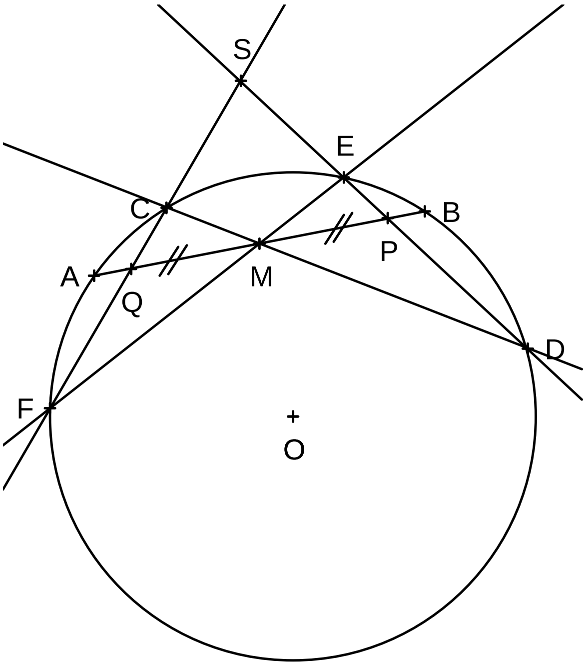
Rappel 2 : Soit A, B , C et D quatre points non alignés du plan, les propositions suivants sont équivalentes :

- ❖ Les points A, B, C et D sont cocycliques
- ❖ $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[modulo\ \pi]$
- ❖ Si les droites (AB) et (CD) se coupent en un point M , $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$

Rappel 3 :
Soit Γ et Γ’ deux cercles et soit M un point.

- ❖ Une droite Δ passant par M coupe le cercle Γ en deux points A et B. Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est la puissance du point M par rapport au cercle Γ
- ❖ L’ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles Γ et Γ’ est une droite appelée axe radical des deux cercles.

Preuve 1 *:*



Notions utilisées :

Théorème de Menelaüs

Soit S le point d'intersection des droites (CF) et (DE).En appliquant le théorème de Menelaüs dans le triangle SQP on a :

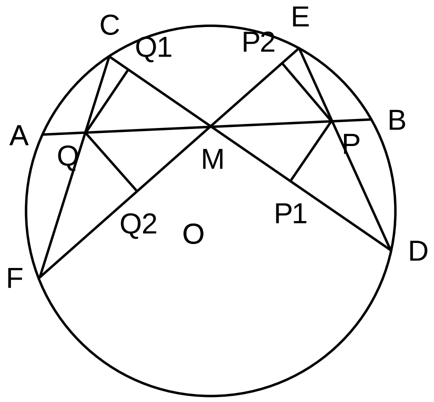
$\frac{CS}{CQ} \times \frac{MQ}{MP} \times \frac{DP}{DS} = 1$ et $\frac{FS}{FQ} \times \frac{MQ}{MP} \times \frac{EP}{ES} = 1$.

En multipliant membre à membre ces deux égalités on obtient : $\frac{CS.FS}{CQ.FQ} \times \frac{MQ^2}{MP^2} \times \frac{DP.EP}{DS.ES} = 1$; or on a $CS.FS = DS.ES$ (puissance du point S par rapport au cercle Γ), $DP.EP = PA.PB$ (puissance du point P par rapport au cercle Γ) et $CQ.FQ = QA.QB$(puissance du point Q par rapport au cercle (Γ). Ainsi,

$\frac{CS.FS}{CQ.FQ} \times \frac{MQ^2}{MP^2} \times \frac{DP.EP}{DS.ES} = \frac{MQ^2}{Mp^2} \times \frac{PA.PB}{QA.QB} = 1$, donc $\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{QA.QB}{PA.PB}$.

$QA.QB = (AM - QM)(BM + QM)$ et $PA.PB = (AM + PM)(BM - PM)$, or $MA = MB$ d'où $QA.QB = AM^2 - QM^2$ et $PA.PB = AM^2 - PM^2$, ainsi $\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{AM^2-QM^2}{AM^2-MP^2}$. On a alors $MQ^2.AM^2 - MQ^2.MP^2 = MP^2.AM^2 - MP^2.QM^2$, c'est-à-dire $MQ^2.AM^2 = MP^2.AM^2$ d'où $MQ = MP$.

preuve 2 :



Notions utilisées :
- *Points cocycliques*
- *Triangles semblables*
- *Puissance d'un point par rapport à un cercle*

On pose $x1 = QQ1, x2 = QQ2, y1 = PP1, y2 = PP2, x = QM, y = PM, a = AM.$

Les triangles $QMQ1$ et $PMP1$ sont semblables donc $\frac{x1}{y1} = \frac{x}{y}$. Il en est de même :

- des triangles $QMQ2$ et $PMP2$: $\frac{x2}{y2} = \frac{x}{y}$
- des triangles $QCQ1$ et $PMP2$: $\frac{x1}{y2} = \frac{CQ}{EP}$
- des triangles $QFQ2$ et $PDP1$: $\frac{x2}{y1} = \frac{FQ}{DP}$.

D'après la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle, on a

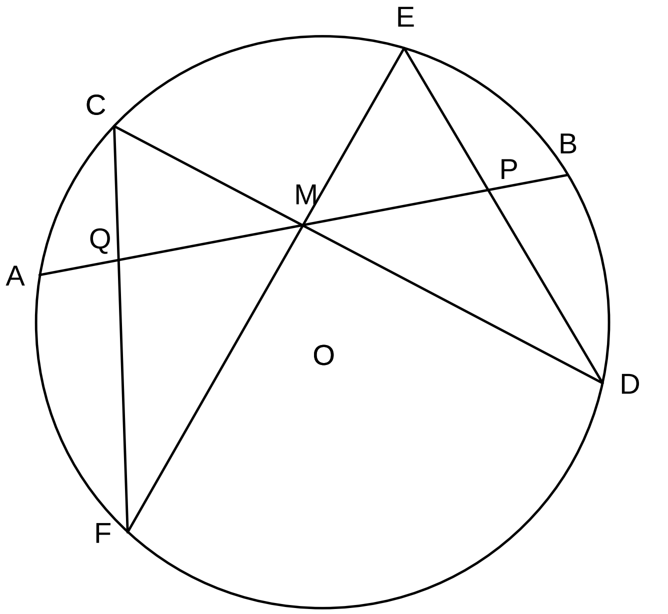
$CQ \times FQ = AQ \times BQ$ et $EP \times DP = AP \times BP.$

$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x1x2}{y1y2} = \frac{CQ \times FQ}{EP \times DP} = \frac{AQ \times BQ}{AP \times BP} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$

On a $\frac{a^2-x^2}{x^2} = \frac{a^2-y^2}{y^2}$ c'est-à-dire $\frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{a^2}{y^2} - 1$ ainsi $x^2 = y^2$ donc $x = y$.

$QM = PM$ donc M est le milieu de $[QP]$.

***Preuve 3** :*



Notions utilisées :

- *Points cocycliques*
- ***Loi des sinus***
- *Puissance d'un point par rapport à un cercle*

On pose $\widehat{FMQ} = \widehat{EMP} = \alpha$, $\widehat{CMQ} = \widehat{DMP} = \beta$, $\widehat{QCM} = \widehat{PEM} = \gamma$, $QM = x$, $PM = y$, $AM = BM = a$

D'après la loi des sinus on a :

Dans le triangle FQM, $\frac{FQ}{sin\alpha} = \frac{QM}{sin[180°-(\alpha+\beta+\gamma)]} = \frac{x}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ (car $\sin(180° - \varphi) = sin\varphi$).

Dans le triangle CMQ, $\frac{CQ}{sin\beta} = \frac{x}{sin\gamma}$.

On a $CQ \times FQ = \frac{x^2 sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\gamma)sin(\alpha+\beta+\gamma)}$, comme dans cette égalité α et β jouent des rôles symétriques alors on a également $EP \times DP = \frac{y^2 sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\gamma)sin(\alpha+\beta+\gamma)}$.

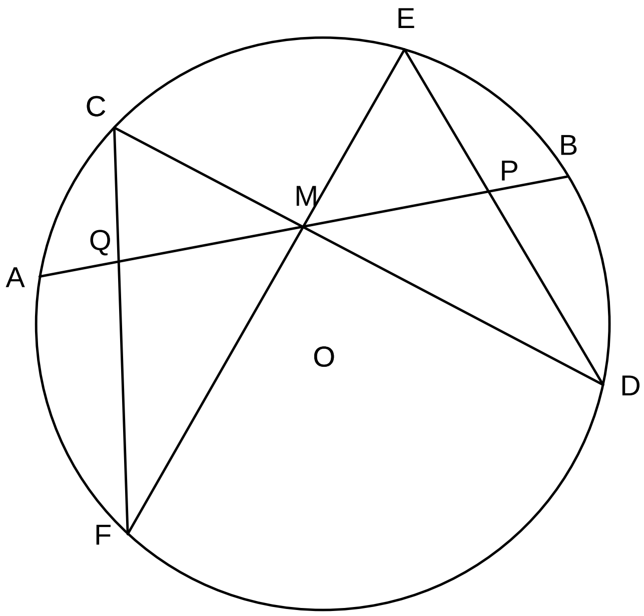
On sait que $CQ \times FQ = AQ \times BQ$ (puissance du point Q par rapport au cercleΓ) et

$EP \times DP = AP \times B$ (puissance du point P par rapport au cercle Γ).

On a $AQ \times BQ = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$ et $AP \times BP = (a + y)(a - y) = a^2 - y^2$, ainsi on a :
$\frac{x^2 sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\gamma)sin(\alpha+\beta+\gamma)} = a^2 - x^2$ et $\frac{y^2 sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\gamma)sin(\alpha+\beta+\gamma)} = a^2 - y^2$ donc $\frac{sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\gamma)sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{a^2-x^2}{x^2} = \frac{a^2-y^2}{y^2}$.

On a $\frac{a^2-x^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} - 1$ et $\frac{a^2-y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2} - 1$, de l'égalité $\frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{a^2}{y^2} - 1$ on tire que $x^2 = y^2$ c'est-à-dire $x = y$.

preuve 4



Cette preuve est basée sur le lemme suivant :

Si ABC et DEF sont deux triangles tels que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, *alors* $\frac{Aire(ABC)}{Aire\ (DEF)} = \frac{AB \times AC}{DE \times DF}$

En effet , $Aire(ABC) = AB \times AC \times \sin\,(\widehat{BAC})$ et $Aire(DEF) = DE \times DF \times \sin(\widehat{EDF})$, or $\sin(\widehat{BAC}) = sin\widehat{EDF}$, d'où le lemme.

$\widehat{MCQ} = \widehat{MEP},\ \widehat{CMQ} = \widehat{DMP},\ \widehat{MFQ} = \widehat{MDP},\ \ \widehat{FMQ} = \widehat{EMP}$. En appliquant le lemme, on a :

$$\frac{Aire(MCQ)}{Aire\ (MEP)} = \frac{CM \times CQ}{EM \times EP}$$
$$\frac{Aire(MEP)}{Aire\ (MFQ)} = \frac{ME \times MP}{MF \times MQ}$$
$$\frac{Aire(MFQ)}{Aire\ (MDP)} = \frac{FM \times FQ}{DM \times DP}$$
$$\frac{Aire(MDP)}{Aire\ (MCQ)} = \frac{MD \times MP}{MC \times MQ}$$

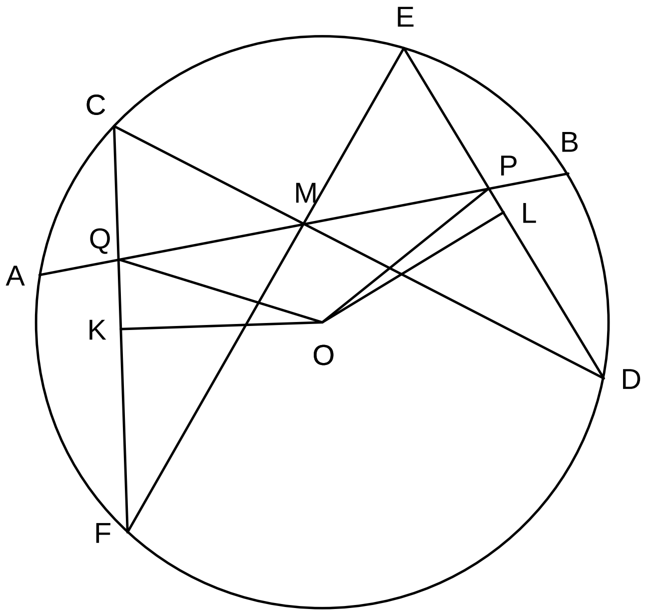
En multipliant membre à membre et en simplifiant, on obtient :

$\frac{CQ \times FQ \times MP^2}{EP \times DP \times MQ^2} = 1$, c'est-à-dire $\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{CQ \times FQ}{EP \times DP}$.

$CQ \times FQ = AQ \times BQ$ et $EP \times DP = AP \times BP$ (puissance d'un point par rapport à un cercle).

$AQ \times BQ = (AM - MQ)(BM + MQ)$ et $AP \times BP = (AM + MP)(BM - MP)$ or $AM = BM$ donc $AQ \times BQ = AM^2 - MQ^2$ et $AP \times BP = AM^2 - MP^2$, ainsi on a $\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{AM^2 - MQ^2}{AM^2 - MP^2}$, c'est-à-dire $\frac{AM^2 - AP^2}{MP^2} = \frac{AM^2 - MQ^2}{MQ^2}$. On obtient $\frac{AM^2}{MP^2} - 1 = \frac{AM^2}{MQ^2} - 1$ d'où $MP^2 = MQ^2$ et $MP = MQ$.

Preuve 5 :



Notions utilisées :

- *Points cocycliques*
- *Triangles semblables*

Soit O le centre du cercle Γ ; K et L les projetés orthogonaux du point O respectivement sur $[CF]$ et $[ED]$.

K et L sont respectivement les milieux côtés $[CF]$ et $[ED]$.

Les points C, F, D, E sont cocycliques donc on a : $\widehat{FCD} = \widehat{FED}$ et $\widehat{CFE} = \widehat{CDE}$.

Les triangles CFM et EDM sont semblables donc $\frac{CF}{CM} = \frac{ED}{EM}$.

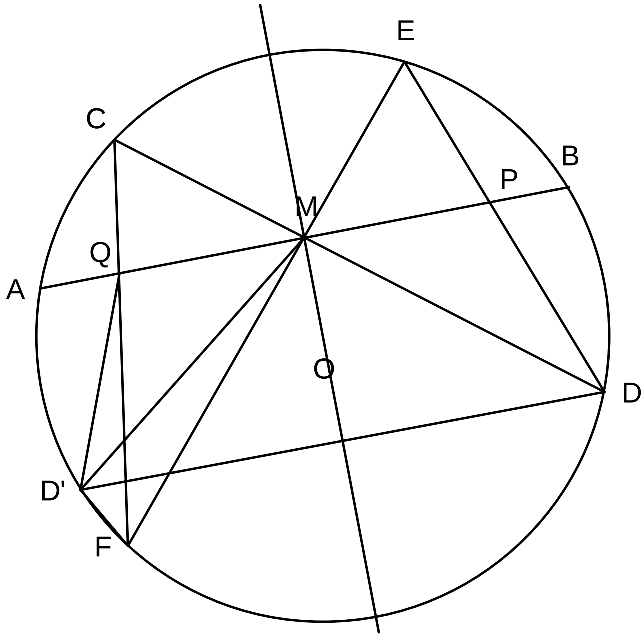
On sait que $CF = 2CK$ et $ED = 2EL$ donc $\frac{CK}{CM} = \frac{EL}{EM}$. Les triangles CKM et ELM ont deux paires de côtés proportionnels et en outre les angles correspondants à ces côtés proportionnels sont égaux donc ils sont semblables ; par conséquent $\widehat{CKM} = \widehat{ELM}$.

Le point M est le projeté orthogonal du point O sur le segment $[AB]$, ainsi les points O, K, Q, M sont sur le cercle de diamètre $[OQ]$, de même les points O, L, P, M sont sur le cercle de diamètre $[OP]$.

D'après la propriété des points cocycliques, on a : $\widehat{QKM} = \widehat{QOM}$ et $\widehat{PLM} = \widehat{POM}$; de plus $\widehat{QKM} = \widehat{CKM}$, $\widehat{PLM} = \widehat{ELM}$ et comme $\widehat{CKM} = \widehat{ELM}$ alors $\widehat{QOM} = \widehat{POM}$.

Dans le triangle OPQ la droite (OM) est la hauteur issue du sommet O et la bissectrice de l'angle $\widehat{POQ}$ donc le triangle OPQ est isocèle en O par conséquent M est le milieu de $[PQ]$.

***Preuve 6** :*



Notions utilisées :

- *Propriété angulaire d'une symétrie orthogonale*
- *Points cocycliques*
- *Triangles isométriques*

Soit D' le symétrique du point D par rapport à(OM), $MD = MD'$ donc le triangle MDD' est isocèle en M, ainsi $\widehat{MD'D} = \widehat{MDD'}$.

Les droites (DD') et (PQ) sont parallèles (elles sont perpendiculaires à une même droite), on a $\widehat{QMD'} = \widehat{MD'D}$ et $\widehat{PMD} = \widehat{MDD'}$ (propriété des angles alternes-interne) donc $\widehat{QMD'} = \widehat{PMD}$.

Les points C, D, F, D' sont cocycliques donc on a $\widehat{CFD'} = \widehat{CDD'}$ ou $\widehat{CFD'} = 180° - \widehat{CDD'}$; les points C, Q et F sont alignés donc $\widehat{CFD'} = \widehat{QFD'}$ de même $\widehat{CDD'} = \widehat{MDD'}$.

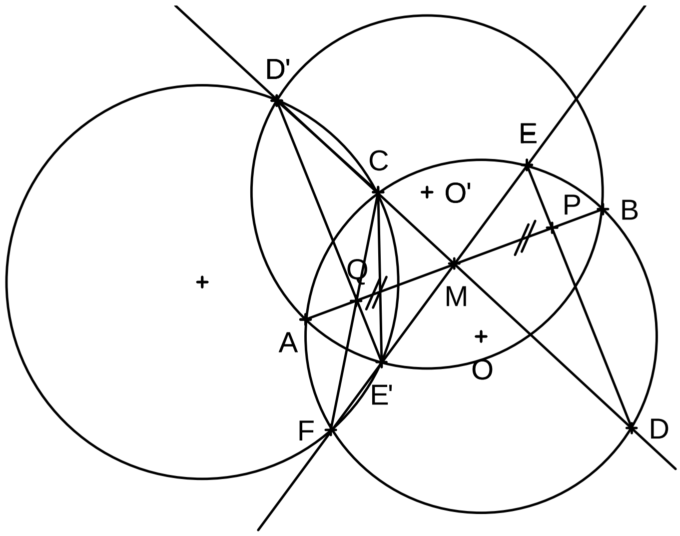
Considérons le quadrilatère $MFD'Q$: on a $\widehat{QFD'} = \widehat{MDD'}$ ou $\widehat{QFD'} = 180° - \widehat{MDD'}$ c'est-à-dire $\widehat{QFD'} = \widehat{QMD'}$ ou $\widehat{QFD'} = 180° - \widehat{QMD'}$ donc le quadrilatère $MFD'Q$ est inscriptible ; on a par conséquent $\widehat{QD'M} = \widehat{QFM}$.

Les points C, F, D, E sont cocycliques donc $\widehat{CFE} = \widehat{CDE}$, or $\widehat{CFE} = \widehat{QFM}$ et $\widehat{CDE} = \widehat{MDP}$ donc $\widehat{QD'M} = \widehat{MDP}$.

On a $\begin{cases} MD = MD' \\ \widehat{QMD'} = \widehat{PMD} \\ \widehat{QD'M} = \widehat{MDP} \end{cases}$ donc les triangles QMD' et PMD sont isométriques par conséquent

$QM = PM$.

Preuve 7 *:*



Notions utilisées :

- *Points cocycliques*
- *Puissance d'un point par rapport à un cercle*
- *Axe radical de deux cercles*

Soit D' et E' les symétriques respectifs des points D et E par rapport au point M et soit Γ' le symétrique du cercle Γ par rapport au point M.Les cercles Γ et Γ' se coupent en A et Bcar M est le milieu de $[AB]$.

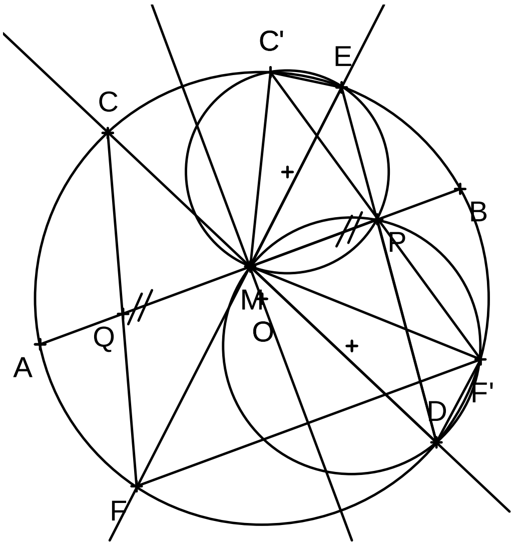
On a $\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{ME}.\overline{MF}$ (puissance du point M par rapport au cercle Γ). Or $\overline{MD} = -\overline{MD'}$ et $\overline{ME} = -\overline{ME'}$ donc $\overline{MC}.\overline{MD'} = \overline{ME'}.\overline{MF}$, ainsi les points D', C, E' et F sont cocycliques ; ils appartiennent à un cercle Γ''.

La droite (AB) est l'axe radical des cercles Γ et Γ'. La droite (CF) est l'axe radical des cercles Γ et Γ''. La droite $(E'D')$ est l'axe radical des cercles Γ' et Γ''.

Le point Q appartient à la droite (AB) donc à l'axe radical des cercles Γ et Γ'. On sait que $\overline{QA}.\overline{QB}$ est la puissance du point Q par rapport au cercle Γ' ; de même $\overline{QC}.\overline{QF}$ est la puissance du point Q par rapport au cercle Γ'' ; or $\overline{QA}.\overline{QB} = \overline{QC}.\overline{QF}$ (puissance du point Q par au cercle Γ), donc le point Q appartient à l'axe radical des cercles Γ' et Γ'', par conséquent le point Q appartient à la droite $(D'E')$.

Le point Q est l'intersection des droites (AB) et $(E'D')$ donc son symétrique par rapport au point M est le point d'intersection des droites (AB) et (ED) or les deux droites se coupent en P ; ainsi les points Q et P sont symétriques par rapport au point M.

Preuve 8 :



Notions utilisées :

- *Points cocycliques*
- *Symétrique d'un point par rapport à une droite*

Soit C' le symétrique orthogonal de C par rapport à la droite (OM) et D' le symétrique orthogonal de D par rapport à la droite (OM). Soit R le point d'intersection des droite (ED) et (C'F').

Montrons que les points M, R et Q sont alignés.

Tous les égalités d'angles sont modulo π.

$\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CM}\right)=\left(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{C'F'}\right)$ (Une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé).

$\left(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{C'F'}\right)=\left(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{C'R}\right)$ or $\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CM}\right)=\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}\right)$(points cocycliques) et $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}\right)=\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{ER}\right)$. Ainsi, on a $\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{ER}\right)=\left(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{C'R}\right)$ donc les points E, M, R et C' sont cocycliques.

Dans le cercle (T), $\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{C'E},\overrightarrow{C'R}\right)=\left(\overrightarrow{C'E},\overrightarrow{C'F'}\right)$.

$\left(\overrightarrow{C'E},\overrightarrow{C'F'}\right)=\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FF'}\right)$ (points cocycliques) donc $\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MR}\right)=\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FF'}\right)=\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FF'}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{FF'}$ sont colinéaires, de même que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MQ}$ donc on a $\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FF'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MQ}\right)$, d'où $\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MQ}\right)=\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MR}\right)$, par conséquent les points M, Q et R sont alignés.

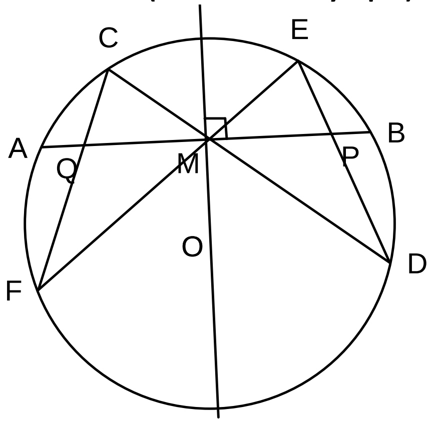
Montrons que les points Q et R sont confondus

R appartient à la droite (MQ) et les droites (MQ) et (PQ) sont confondues dont R est le point d'intersection des droites (PQ) et (ED) donc il est confondu avec le point Q.

Montrons que M est le milieu du segment [PQ]

Soit Q' le symétrique de Q par rapport à la droite (OM), Q' appartient à la droite (CF) car Q appartient à la droite (C'F'), de plus Q' appartient à la droite (AB) car Q appartient à la droite (AB) et les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (OM). Q' est le point d'intersection des droites (AB) et (CF) donc il est confondu avec le point P. Les points P et Q sont symétriques par rapport à la droite (OM) donc M est le milieu du segment [PQ].

Preuve 9 : (Méthode analytique)



Comme (OM) est perpendiculaire à (AB), considérons un repère orthonormé direct $(M, \vec{u}, \vec{v})$ où le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. On note $(0, m)$ les coordonnées du point O ; La droite (CD) a une équation de la forme $x = ay$ $(a \neq 0)$ car c'est une droite qui passe par le point M origine du repère ; de même la droite(EF) a une équation de la forme $x = by$ $(b \neq 0)$.

Pour simplifier les calculs, on suppose que le cercle Γ est de rayon un.

Une équation cartésienne du cercle Γ est : $x^2 + (y-m)^2 = 1$

Les points C et D appartiennent au cercle Γ donc leurs ordonnées vérifient l'équation $a^2y^2 + (y-m)^2 = 1$ ou encore $(a^2+1)y^2 - 2my + (m^2-1) = 0$.

En utilisant la formule de la somme et du produit des racines d'une équation du second degré on obtient :

$\begin{cases} 2m = (y_C + y_D)(a^2+1) \\ m^2 - 1 = y_C y_D (a^2+1) \end{cases}$; de même on a : $\begin{cases} 2m = (y_E + y_F)(b^2+1) \\ m^2 - 1 = y_E y_F (b^2+1) \end{cases}$.

Soit $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$ les coordonnées respectives des points Q et P.

Les points C, Q, F sont alignés donc : $\frac{x_C - \alpha}{y_C} = \frac{x_F - \alpha}{y_F}$.

On a : $(x_C - \alpha)y_F = (x_F - \alpha)y_C$ donc $\alpha(y_C - y_F) = y_C x_F - x_C y_F$ et comme $x_C = a y_C$ et $x_F = b y_F$, on a alors $\alpha(y_C - y_F) = (b-a)y_C y_F$.

Les points E, P, D sont alignés donc : $\frac{x_E - \beta}{y_E} = \frac{x_D - \beta}{y_D}$.

On a : $(x_E - \beta)y_D = (x_D - \beta)y_E$ donc $\beta(y_E - y_D) = y_E x_D - x_E y_D$ et comme $x_E = b y_E$ et $x_D = a y_D$, on a alors $\beta(y_E - y_D) = (a-b)y_E y_D$.

Posons le système : $\begin{cases} \alpha(y_C - y_F) = (b-a)y_C y_F & (1) \\ \beta(y_E - y_D) = (a-b)y_E y_D & (2) \end{cases}$

Multiplions l'équation (1) par $(y_E - y_D)$ et l'équation (2) par $(y_C - y_F)$, on obtient :

$\begin{cases} \alpha(y_C - y_F)(y_E - y_D) = (b-a)(y_E - y_D)y_C y_F \\ \beta(y_C - y_F)(y_E - y_D) = (a-b)(y_C - y_F)y_E y_D \end{cases}$, en additionnant les deux équations on a :

$$(\alpha+\beta)(y_C - y_F)(y_E - y_D) = (b-a)[(y_E - y_D)y_C y_F - (y_C - y_F)y_E y_D]$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(y_C - y_F)(y_E - y_D) &= (b-a)[y_E y_C y_F + y_F y_E y_D - (y_C y_D y_F + y_C y_E y_D)] \\ &= (b-a)[y_E y_F (y_C + y_D) - y_C y_D (y_E + y_F)] \\ &= (b-a)\left[\frac{m^2-1}{b^2+1} \times \frac{2m}{a^2+1} - \frac{m^2-1}{a^2+1} \times \frac{2m}{b^2+1}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$y_C \neq y_D$ et $y_E \neq y_D$ donc $\alpha + \beta = 0$.

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{x_Q + y_P}{2} = 0 = x_M$ donc M est le milieu de $[PQ]$.

Notions utilisées

- Division harmonique
- Faisceaux harmoniques
- Polaire d'un point par rapport à une droite
- Polaire d'un point par rapport à un cercle

Les notions que nous développons dans cette partie ne figurent pas dans nos programmes des enseignements des mathématiques ; néanmoins elles peuvent êtres abordées sous la forme d'activités formatives et dans la perspective de renforcer les capacités des apprenants à résoudre les bons problèmes de géométrie.

I. Faisceaux harmonique

Définition 1.1

Quatre points A, B, C et D(dans cet ordre) d'une droite sont dits en **division harmonique** si et seulement si : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

On dit également que C et D divisent harmoniquement le segment [AB] ; du fait du signe du birapport, l'un de ces deux points est à l'intérieur du segment [AB] et l'autre à l'extérieur, de plus les rapports de longueur CA/CB et DA/DB sont égaux.

Remarque :

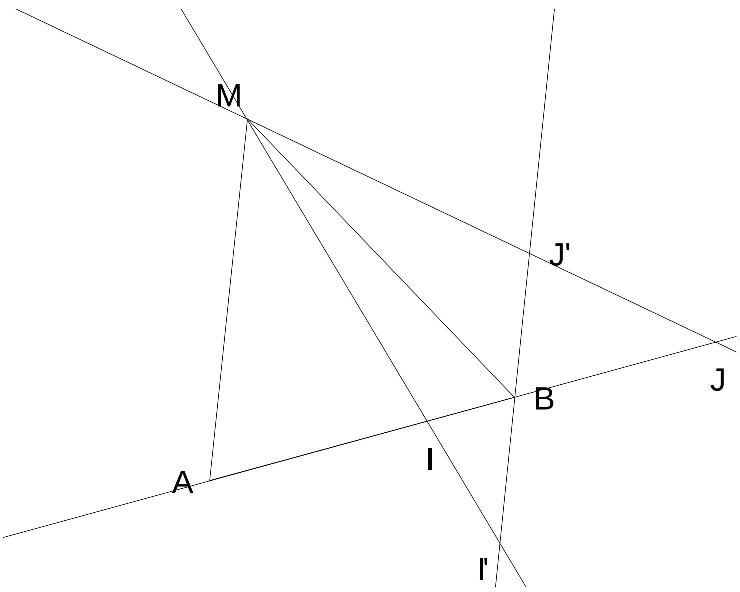
On prouve facilement qu'une suite de quatre points alignés (A,B,C,D) est en division harmonique si et seulement si la relation suivante est vérifiée :

Relation de Newton : $\overline{IC}.\overline{ID} = IA^2 = IB^2$où I est le milieu de [AB] ;

Définition 1.2

Soient trois points *A*, *B* et *I* distincts alignés. Si *I* n'est pas le milieu de [*AB*], il existe un unique point *J* tel que *I* et *J* divisent harmoniquement [*AB*]. Le point *J* est appelé ***conjugué harmonique*** de *I* par rapport à *A* et *B*. D'après ce qui précède, si *J* est le conjugué harmonique de *I* par rapport à deux points donnés, *I* est le conjugué harmonique de *J* par rapport à ces mêmes points.

<u>Construction géométrique du conjugué J d'un point I par rapport à un point I</u>



Soit trois points distincts *A*, *B* et *I* sur une droite, tels que *I* ne soit pas le milieu de *A* et *B*, on peut trouver le point *J* conjugué harmonique de *I* par rapport à *A* et *B* en procédant comme suit :

- soit *M* un point non aligné avec les précédents ; la parallèle à (*MA*) passant par *B* coupe donc (*MI*) en un point que l'on appelle *I'* ;
- soit *J'* le symétrique de *I'* par rapport à B, alors (*MJ'*) coupe (*AB*) en *J* qui est le point cherché. En effet si (*MJ'*) et (*AB*) étaient parallèles, *AMBJ'* serait un parallélogramme, et

donc *AMBI’* également, et le point *I*, intersection des diagonales de ce dernier, serait milieu de *A* et *B*.

En appliquant deux fois le théorème de Thalès pour les triangles on obtient : $\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{BI\prime}}{\overline{AM}}$ et $\frac{\overline{JB}}{\overline{JA}} = \frac{\overline{BJ\prime}}{\overline{AM}}$ d'où $\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = -\frac{\overline{JB}}{\overline{JA}}$ si et seulement si *B* est le milieu de *I’* et *J’*.

Définition 1.3

On dit que quatre droites sécantes en un même point forment un faisceau harmonique si une sécante quelconque à ces quatre droites qui coupent celles-ci en quatre points en division harmonique.

les 4 points étant bien sûr pris dans le même ordre que les droites auxquelles ils appartiennent.

Propriété 1.4 (propriété fondamentale)

Un faisceau de quatre droites concourantes est harmonique si et seulement si une parallèle à l'un de ses rayons est divisée par les trois autres en deux segments égaux.

La preuve est analogue à celle donnée pour la construction du conjugué d(un point par rapport à deux droites.

Propriété 1.5

Étant données 3 droites distinctes concourantes D1, D2 et D3, il existe une unique droite D4 telle que (D1, D2, D3, D4) soit un faisceau harmonique. La droite D4 est la conjuguée harmonique de D3 par rapport à D1 et D2.

En effet, soit *O* le point de concours des trois droites D1, D2 et D3. La droite D4 doit passer par *O*. Soit Δ une sécante aux trois droites D1, D2 et D3 en trois points *A B* et *C*. Si *B* est le milieu de *A* et *C*, D4 est nécessairement la parallèle à Δ passant par *O* et cette droite convient, d'après la propriété fondamentale ci-dessus. Si *B* n'est pas le milieu de *A* et *C*, soit *D* le conjugué harmonique de *C* par rapport à *A* et *B*, la droite D4 est alors nécessairement la droite (*OD*) et celle-ci convient par la propriété fondamentale.

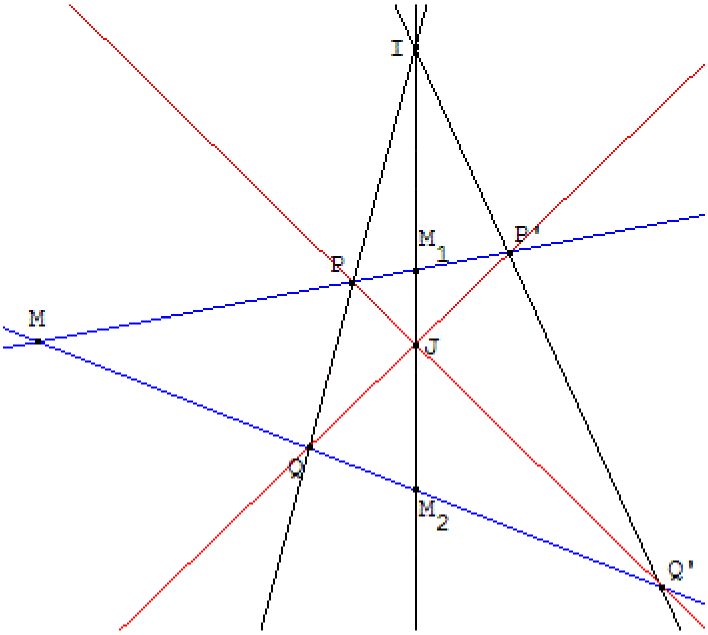
Définition 1.6

Étant donné deux droites distinctes *d* et *d'* et deux points *M* et *M’* distincts non situés sur ces droites, la droite (*MM’*) rencontre respectivement *d* et *d'* en *P* et *P’* distincts. On dit que *M* et *M’* sont *conjugués harmoniques* par rapport à *d* et *d'* si [*M*, *M’*, *P*, *P’*] forme une division harmonique (*M* et *M’* sont conjugués harmoniques par rapport à *P* et *P’*).

Proposition 1.7

Étant donné deux droites d et d' distinctes et concourantes en un point I du plan et un point M non situé sur ces droites, l'ensemble des conjugués harmoniques du point M par rapport à d et d' est une droite passant par I.

En effet tout point sur la conjuguée harmonique de la droite (*IM*) par rapport à *d* et *d’* convient, de par la propriété fondamentale des faisceaux harmoniques. Réciproquement, si *M’* est conjugué harmonique de *M* par rapport à *d* et *d’*, (*d*, *d’*, (*IM*), (*IM’*)) est un faisceau harmonique.



Construction de la polaire du point *M* par rapport aux deux droites *d* (portant *P* et *Q*) et *d'* (portant *P'* et *Q'*). La polaire est la droite (*IJ*).

Définition 1.8 — On appelle cette droite la *polaire* du point *M* par rapport aux droites *d* et *d'*.

Construction de la polaire. — Étant donné deux droites *d* et *d'* distinctes, concourantes en un point *I*, et un point *M* non situé sur ces droites, placer deux points *P* et *Q*, distincts de *I*, sur *d* et tracer les deux droites (*MP*) et (*MQ*). Les points *P* et *Q* sont supposés choisis de telle façon que ni (*MP*), ni (*MQ*) ne soient parallèles à *d'*. Ces droites coupent *d'* respectivement en *P'* et *Q'*. Les droites Δ = (*PQ'*) et Δ' = (*P'Q*) se coupent en *J*. La droite (*IJ*) est la **polaire** de *M* par rapport à *d* et *d'*.

En effet si M_1 est le conjugué de *M* par rapport à *P* et *P'* et M_2 le conjugué de *M* par rapport à *Q* et *Q'*, la polaire de *M* par rapport à *d* et *d'* est la droite (M_1M_2) ; les points *I*, M_1 et M_2 sont donc alignés.
De même la polaire de *M* par rapport à Δ et Δ' est la droite (M_1M_2) ; les points *J*, M_1 et M_2 sont donc également alignés et la polaire de *M* par rapport à *d* et *d'* est bien la droite (*IJ*).

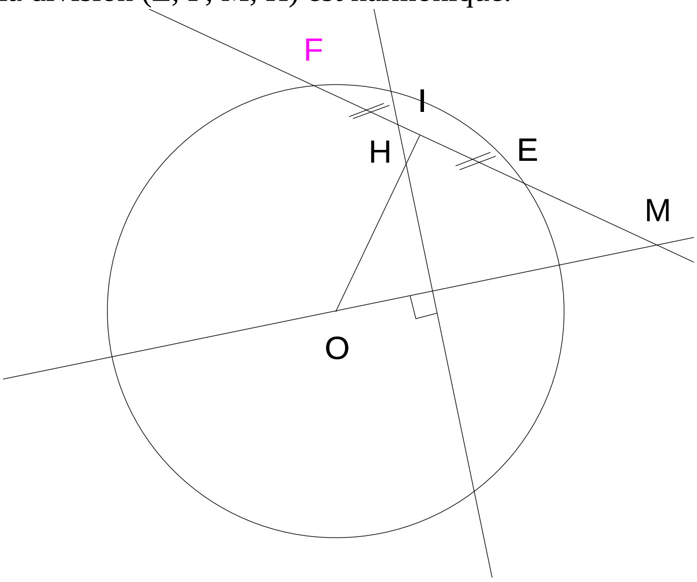
II. Polaire d'un point par rapport à un cercle

Définition 2.1
On dit que deux points M et M' sont conjugués par rapport à un cercle de centre O et de rayon R si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = R^2.$$

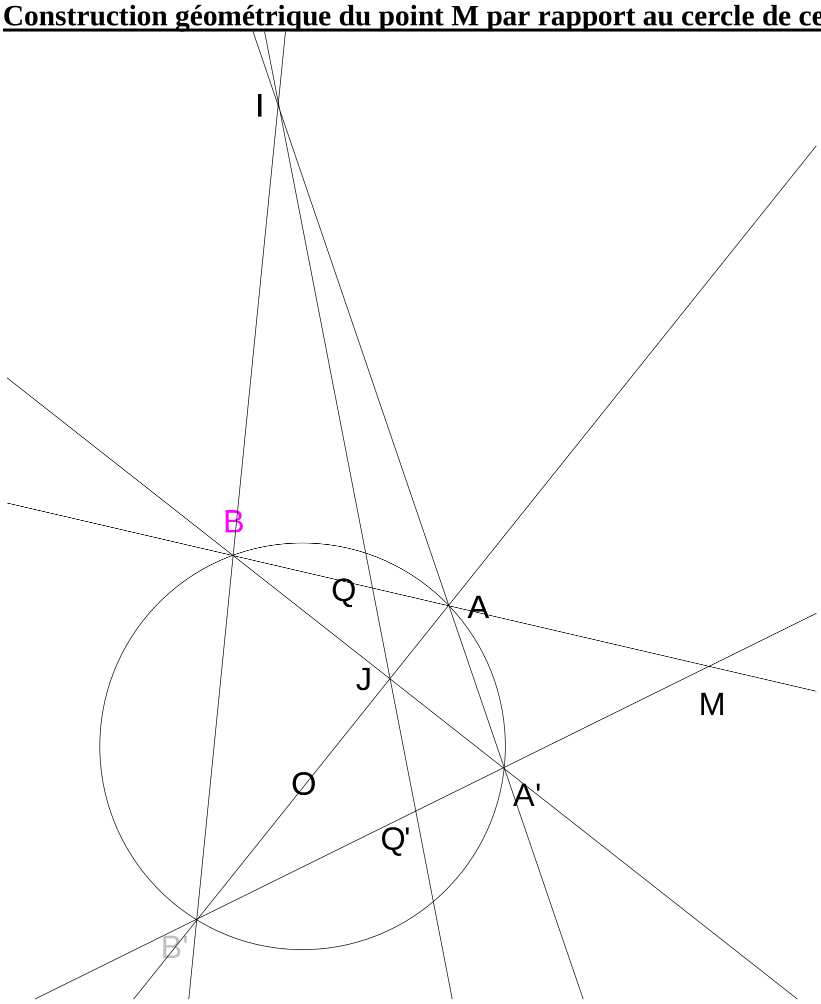
Propriété 2.2
L'ensemble des conjugués d'un point par rapport à un cercle est une droite appelée **polaire** de ce point par rapport au dit cercle.(la preuve de cette propriété est laissée au lecteur).
Remarque :
La polaire du point M par rapport au cercle de centre O et de rayon R est une droite perpendiculaire à la droite *(OM).*
Propriété 2.3
Soit P le point de la polaire de M situé sur la droite (OM) et soit A et B les points d'intersection du cercle et de la droite (OM). La division (A, B, M, P) est harmonique.
En effet, on a $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = R^2 = OA^2 = OB^2$, donc d'après la **relation de Newton** la division (A, B, M, P) est harmonique.

Conséquence :
Soit M un point non situé sur le cercle (C) de centre O et de rayon R. Une droite Δ passant par M coupe (C) en E et F. Si H est le point de Δ situé sur la polaire de M par rapport au cercle (C) alors la division (E, F, M, H) est harmonique.



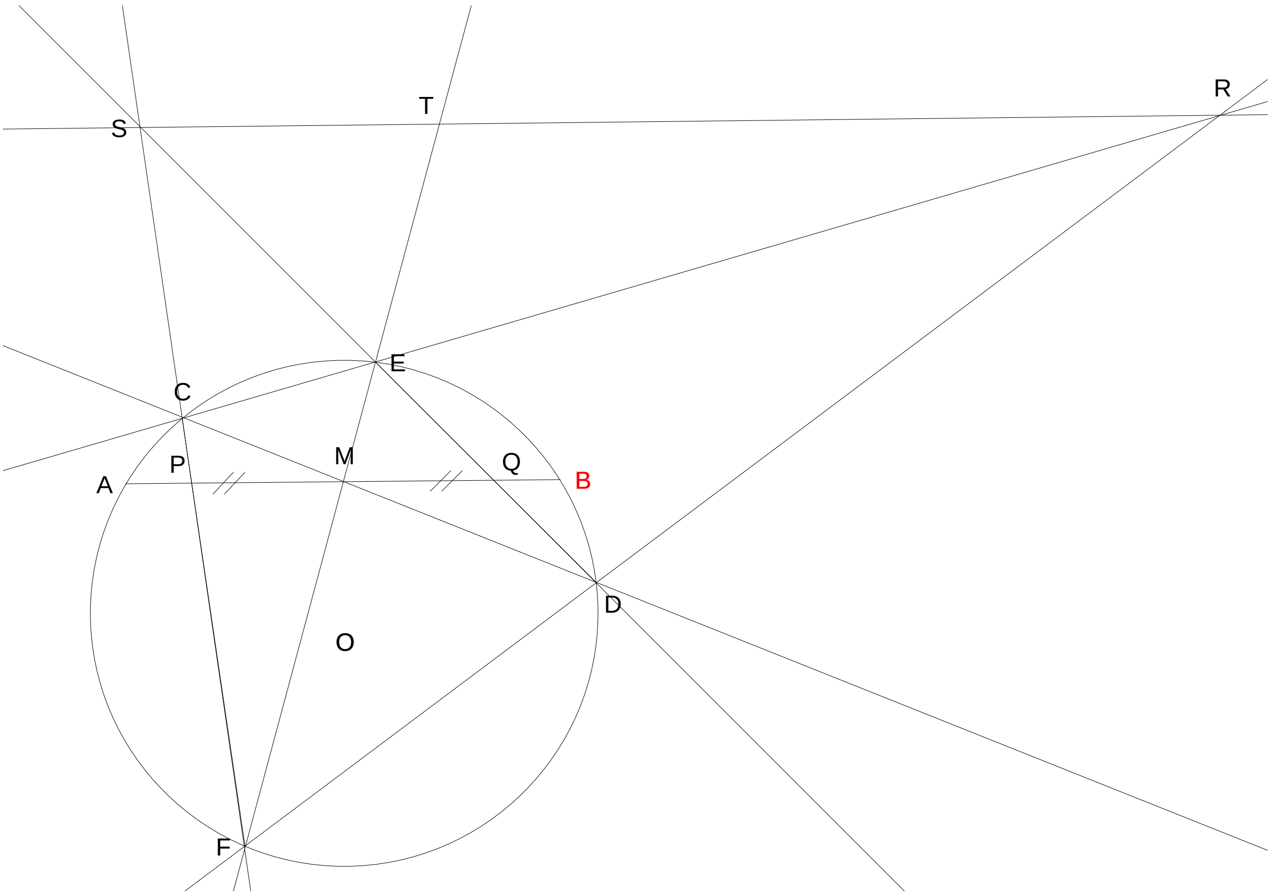
Soit I le milieu de [EF], on sait que les droites (OI) et (EF) sont perpendiculaires. H est un point de la polaire de M par rapport au cercle (C), donc on a $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OH} = R^2$.
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OH} = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IH}\right) = OI^2 + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IH}$, or $OI^2 = R^2 - IE^2$ donc $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IH} = IE^2 = IF^2$, ainsi d'après la relation de Newton la division (E, F, M, H) est harmonique.

<u>Construction géométrique du point M par rapport au cercle de centre O et de rayon R</u>



Soit Q et Q’ deux points de la polaire du point M par rapport au cercle de centre O et de rayon R. D’après la conséquence de la propriété 2.3, cette polaire est également la polaire de M par rapport aux droites (AA’) et (BB’) et aussi la polaire de M par rapport aux droites (AB’) et (BA’), c’est donc la droite (IJ).

Preuve du théorème :



Soit S le point d’intersection des droites (CF) et (ED), R le point d’intersection des droites (CE) et (DF), T le point d’intersection des droites (FE) et (SR).D’après la construction qui précède, l a droite (SR) est la polaire du point M par rapport au cercle. (OM) est perpendiculaire à (SR) et (OM) est perpendiculaire à (AB) donc les droites (SR) et (AB) sont parallèles. La division (F, E, M, T) est harmonique (propriété 2.3), donc le faisceau [(RF), (RE), (RM), (RT)] est un faisceau harmonique et comme les droites (RS) et (AB) sont parallèles alors d’après la propriété fondamentale, M est le milieu du segment [PQ].