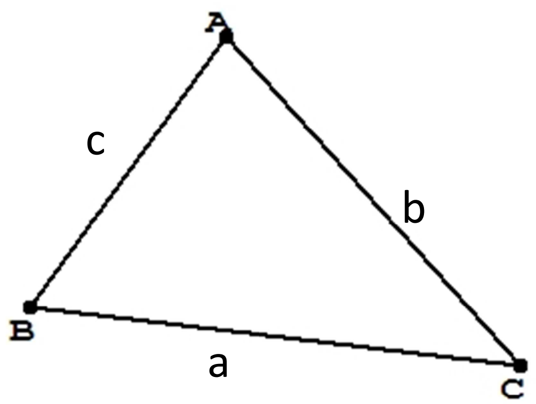
POINT de DELONGCHAMPS, et THEOREME D'ERDOS-MORDELL

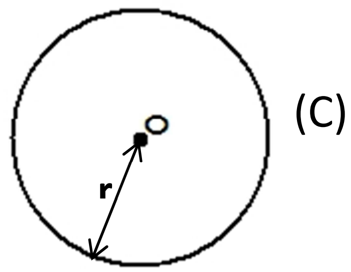
DANS UN TRIANGLE

1. POINT DE DELONGCHAMPS DANS UN TRIANGLE

1.1 Rappels et notations

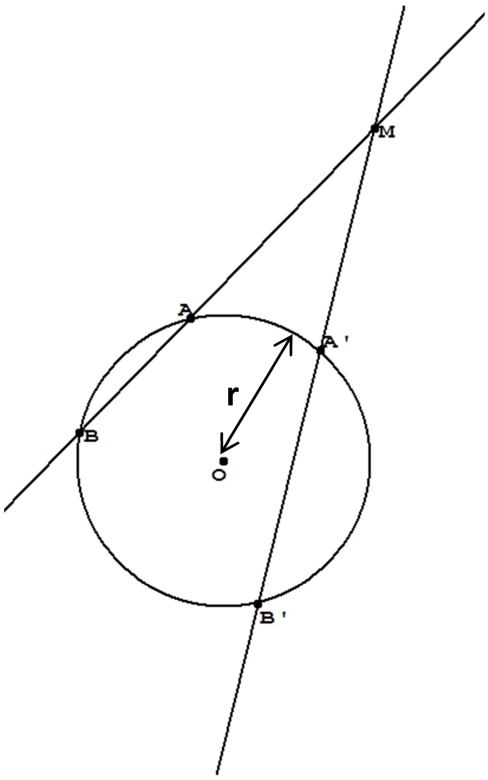
Dans tout le texte, T = (ABC) désigne un triangle standard quelconque, dont les longueurs des côtés sont notées a pour BC, b pour CA, et c pour AB.





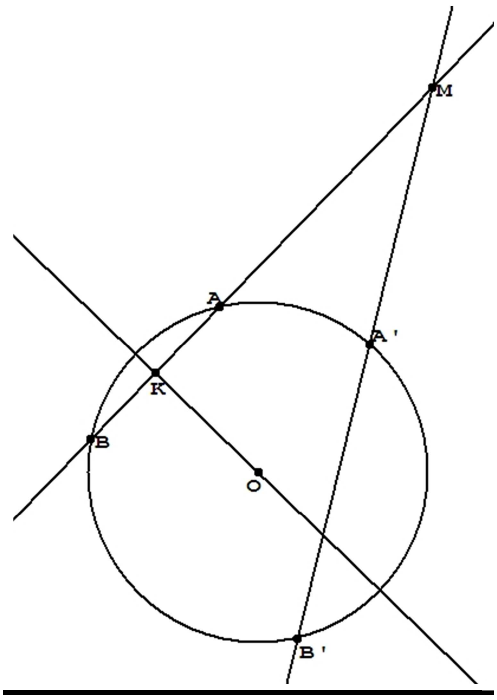
SI (C) est un cercle de centre O et de rayon r, on le notera aussi (O) si aucun risque de confusion n'est à craindre.

Proposition 1.1.1



Si (C) est un cercle de centre O et de rayon r, et M un point donné du même plan, hors du cercle, si une droite variable d passant par M coupe le cercle en deux points A et B, alors le produit MA$\times$MB est indépendant de d.

Démonstration

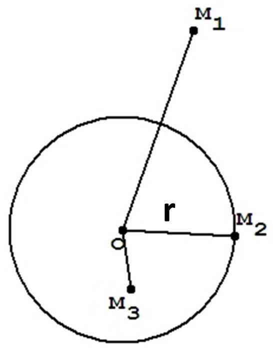


Il s'agit de prouver que, si une deuxième sécante d' passant par M coupe le cercle en A' et B', alors on a nécessairement MA'×MB'= MA×MB. Or, les triangles (MAB') et (MA'B), ayant l'angle en M commun, et les angles en B' et B égaux parce qu'inscrits dans le cercle et y interceptant le même arc, sont semblables. De là résulte que $\frac{MA}{MA'} = \frac{MB'}{MB}$, donc MA×MB = MA'×MB' d'où le résultat.

Si le produit MA×MB ne dépend pas de la sécante choisie, exprimons-le en fonction des seules constantes du problème. Désignons par K le milieu du bipoint (A,B) ; (OK) est alors la médiatrice de (A,B) donc $\overline{MA} \times \overline{MB}$ =($\overline{MK}$+$\overline{KA}$) ($\overline{MK}$ + $\overline{KB}$) = ($\overline{MK}$+$\overline{KA}$) × ($\overline{MK}$- $\overline{KA}$) = $\overline{MK^2}$ - $\overline{KA}^2$ = $\overline{MK^2}$ - ($\overline{OA}^2$ - $\overline{OK^2}$) = $\overline{MK^2}$ + $\overline{OK}^2$ - $\overline{OA}^2$ = $\overline{MO^2}$ - $\overline{OA}^2$ = $\overline{MO^2}$ - r² .

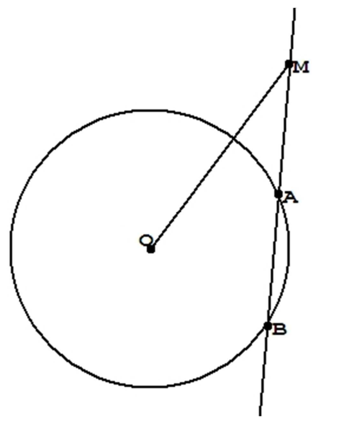
Ceci prouve bien que le produit $\overline{MA} \times \overline{MB}$ = $\overline{MO^2}$ - r² dépend seulement du point M et du cercle.

Remarque 1.1.1.1



Si M est hors du cercle (resp. sur le cercle, resp. à l'intérieur du cercle) , le réel MO²- r² est strictement positif (resp. égal à zéro, resp. strictement négatif).

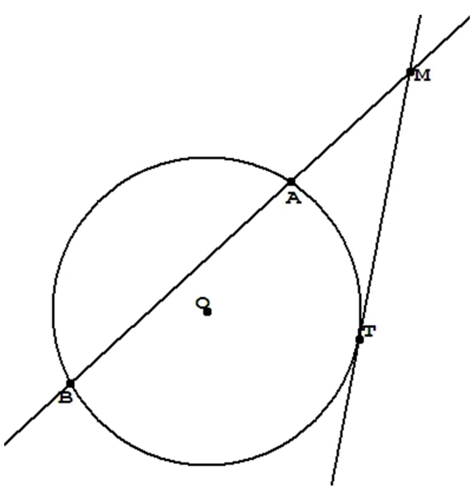
Définition 1.1.2



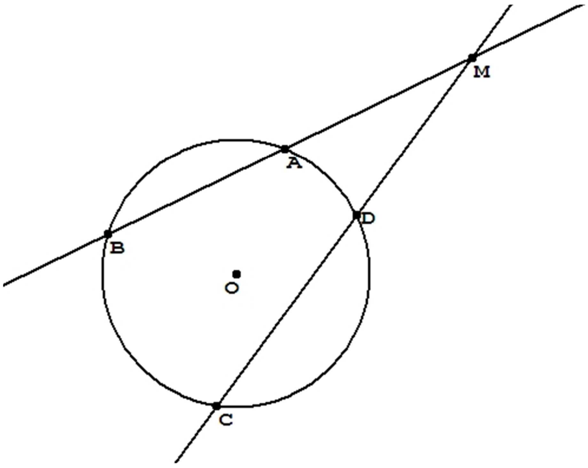
Etant donné un cercle de centre O et de rayon r ainsi qu'un point M du même plan, le produit $\overline{MA} \times \overline{MB}$ = $\overline{MO^2}$ - r² vu précédemment s'appelle la puissance du point M par rapport au cercle (O). On la note $P_{(o)}$ (M).

La puissance d'un point par rapport à un cercle obéit donc aux conditions de la remarque 1.1.1.1 précédente.

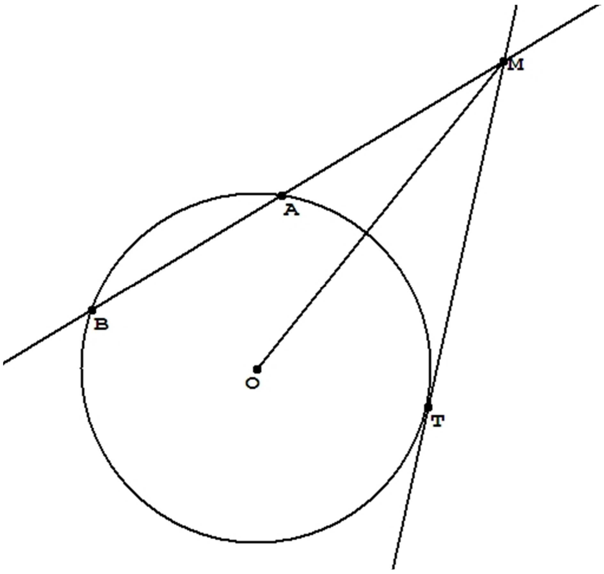
Proposition 1.1.3



1°/ Si le cercle (O) et le point M extérieur à (O) sont donnés, pour toute tangente (MT) à (O), la puissance de M par rapport au cercle est égale à MT², et donc MT² = MA×MB pour toute sécante (MAB) au cercle.



2°/ Si A,B, C , D sont quatre points non alignés tels que (AB) coupe (CD) en M, l'égalité $\overline{\mathbf{MA}} \times \overline{\mathbf{MB}} = \overline{\mathbf{MC}} \times \overline{\mathbf{MD}}$ équivaut à dire que ces quatre points A, B, C, D sont cocycliques.



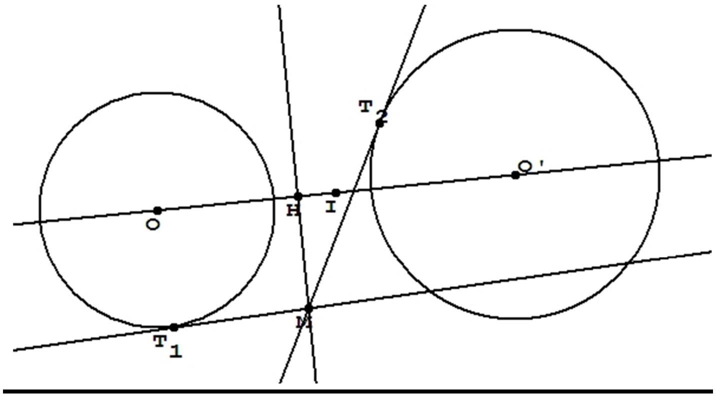
3°/ Si M, A, B sont trois points alignés distincts et T un point hors de (AB) tel que $MT^2 = MA \times MB$, alors le cercle (ABT) est tangent en T à la droite (MT)

Tout cela est facile à établir et sera donc laissé au lecteur.

Proposition 1.1.4

Soient deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' distincts et de rayons r et r'. Le lieu géométrique des points M qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite (D) perpendiculaire à (OO'). Si le pied de (D) sur (OO') est noté H, et si I est le milieu du bipoint (O, O'), pour tout point M de (D) se projetant en H sur (OO'), on a $2.IH.OO' = r^2 - r'^2$

Démonstration

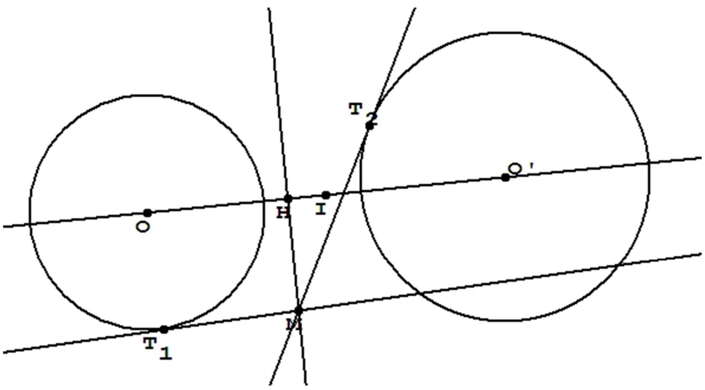


Par hypothèse, pour tout point M solution, on a : $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$, donc $MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$. Or, en notant I et H les points signalés, on a $MO^2 - MO'^2 = (\overline{MO} + \overline{MO'})(\overline{MO} - \overline{MO'})$, donc $MO^2 - MO'^2 = 2\overline{IM}.\overline{OO'}$ et par conséquent, on obtient la relation $2\overline{IM}.\overline{OO'} = r^2 - r'^2$ et ce dernier membre est une constante ; on reconnait là une ligne de niveau classique, d'où le résultat annoncé

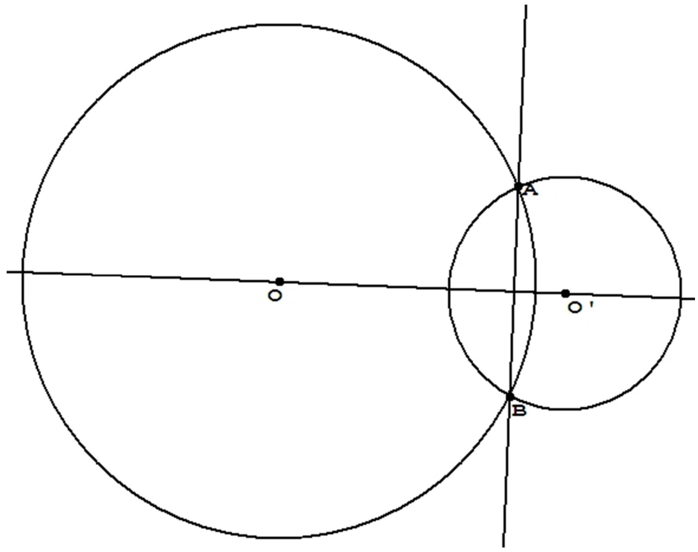
Définition 1.1.5

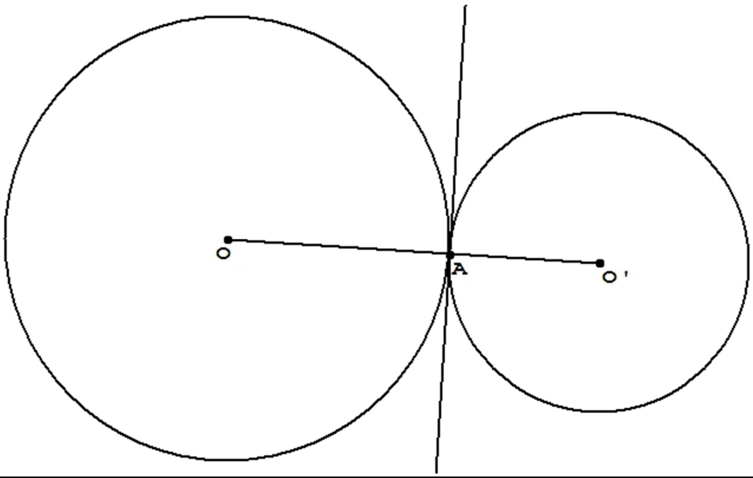
La droite (D) de la proposition 1.1.4 s'appelle *l'axe radical* des deux cercles (C) et (C')

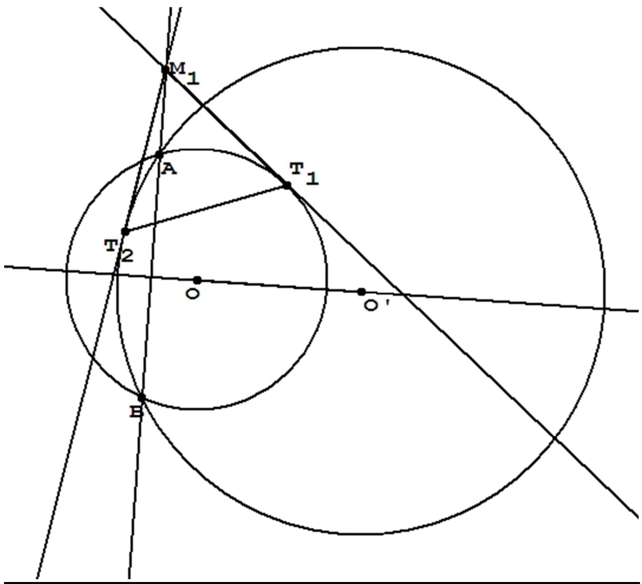
Remarque 1.1.5.1



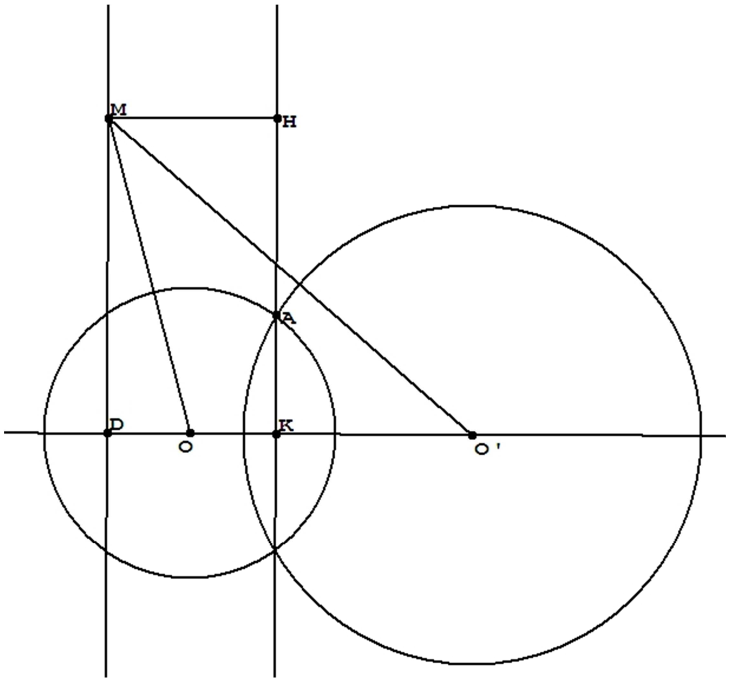
1°/ Si les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, l'axe radical est aussi extérieur aux deux cercles. Si les cercles sont sécants en A et B, l'axe radical est la droite (AB). Enfin, si les cercles sont tangents en A, l'axe radical est la tangente commune en A aux deux cercles







2°/ La portion de l'axe radical, extérieure aux deux cercles (cas de cercles sécants ou tangents), est le lieu géométrique des points M d'où l'on peut mener des tangentes de même longueur aux deux cercles



3°/ Etant donné deux cercles non concentriques de centres O et O' et de rayons r et r', la différence des puissances d'un point M du plan par rapport aux deux cercles est égale, en valeur absolue, au double produit de la distance OO' des centres par la distance de M à l'axe radical des deux cercles

Démonstration :

Il est question de prouver que $|(MO^2 - r^2) - (MO'^2 - r'^2)| = 2OO'.MH$

Soit K le point de contact de l'axe radical des deux cercles et la droite (OO') et D le projeté orthogonal de M sur (OO'). Comme K est sur l'axe radical on a

$$KO'^2 - {r'}^2 = KO^2 - r^2 \to {r'}^2 - r^2 = {KO'}^2 - KO^2$$
$$= (\overline{KO'} - \overline{KO})(\overline{KO'} + \overline{KO})$$

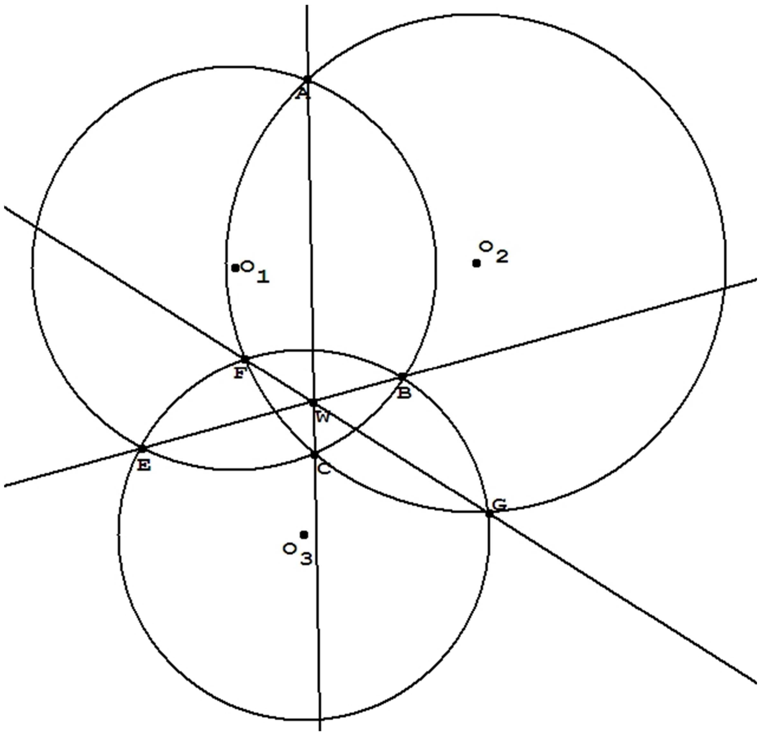
Les triangles (MDO) et (MDO') étant rectangles en D, on a : $MO^2 = MD^2 + DO^2$ et $MO'^2 = MD^2 + DO'^2$ donc $MO^2 - {MO'}^2 = DO^2 - {DO'}^2 = (DO - DO')(DO + DO')$.

On a donc $\left|(MO^2 - r^2) - \left({MO'}^2 - {r'}^2\right)\right| = \left|\left(MO^2 - {MO'}^2\right) + \left(r^2 - {r'}^2\right)\right|$

$$= |(\overline{DO} - \overline{DO'})(\overline{DO} + \overline{DO'}) + (\overline{KO'} - \overline{KO})(\overline{KO'} + \overline{KO})|$$
$$= |-\overline{OO'}(\overline{DK} - \overline{KO} + \overline{DK} + \overline{KO'}) + (\overline{KO'} - \overline{KO})(\overline{KO'} + \overline{KO})|$$
$$= |-\overline{OO'}(2\overline{MH} + \overline{KO'} - \overline{KO}) + (\overline{KO'} - \overline{KO})(\overline{KO'} + \overline{KO})|$$
$$= |-2\overline{OO'}\overline{MH} - \overline{OO'}(\overline{KO'} - \overline{KO}) + (\overline{KO'} - \overline{KO})(\overline{KO'} + \overline{KO})|$$
$$= |-2\overline{OO'}\overline{MH} + (\overline{KO'} - \overline{KO})(-\overline{OO'} + \overline{KO'} + \overline{KO})|$$
$$= |-2\overline{OO'}\overline{MH} + (\overline{KO'} - \overline{KO})(-\overline{OO'} + \overline{OO'})|$$

$$= |-\overline{OO'}2\overline{MH}| = 2OO'MH \qquad CQFD$$

Proposition 1.1.6



Soient trois cercles de rayons respectifs r_1, $r_2$et r_3, et dont les centres respectifs sont O_1, O_2et O_3. Si les centres des cercles ne sont pas alignés, il existe un point et un seul du même plan, qui a même puissance par rapport aux trois cercles

Démonstration :

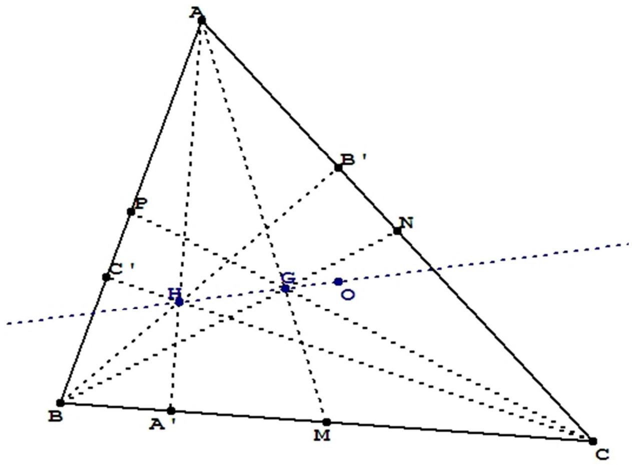
Les points $\boldsymbol{O_1}$**,** $\boldsymbol{O_2}$**et** $\boldsymbol{O_3}$**.** sont deux à deux distincts. Les axes radicaux (D) et (D') des paires de cercles ($\boldsymbol{O_1}$) et ($\boldsymbol{O_2}$), ($\boldsymbol{O_2}$) et ($\boldsymbol{O_3}$) se coupent en un point W, car ces axes sont respectivement perpendiculaires à deux droites concourantes en $\boldsymbol{O_2}$. Le point W a donc même puissance par rapport à ($\boldsymbol{O_1}$) et ($\boldsymbol{O_3}$) donc est situé sur leur axe radical. CQFD.

Définition 1.1.7

Le point W de la proposition 1.1.6 est appelé *le centre radical des trois cercles (O_1), (O_2) et (O_3).*

Il est clair que, si W est extérieur à l'un des cercles, il est aussi extérieur aux autres ; et s'il est intérieur à l'un des cercles, il l'est aussi aux deux autres ; cela résulte du signe de la puissance du point W par rapport aux cercles.

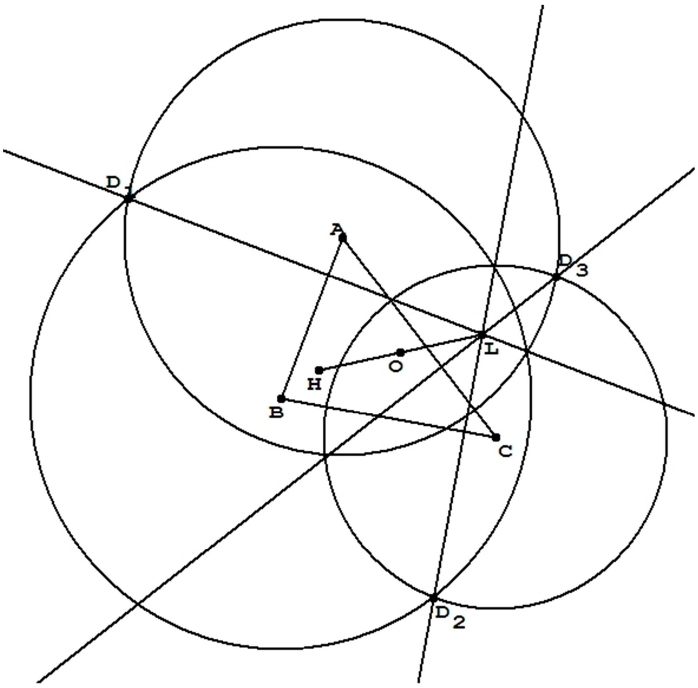
1.2. Le point de Delongchamps



Rappelons que, si T = (ABC) est un triangle quelconque, on notera H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit, M, N, P les milieux respectifs des bipoints (B, C), (C, A) , (A,B)   On notera de même A', B' et C' les pieds des hauteurs relatives aux sommets A, B et C respectivement.

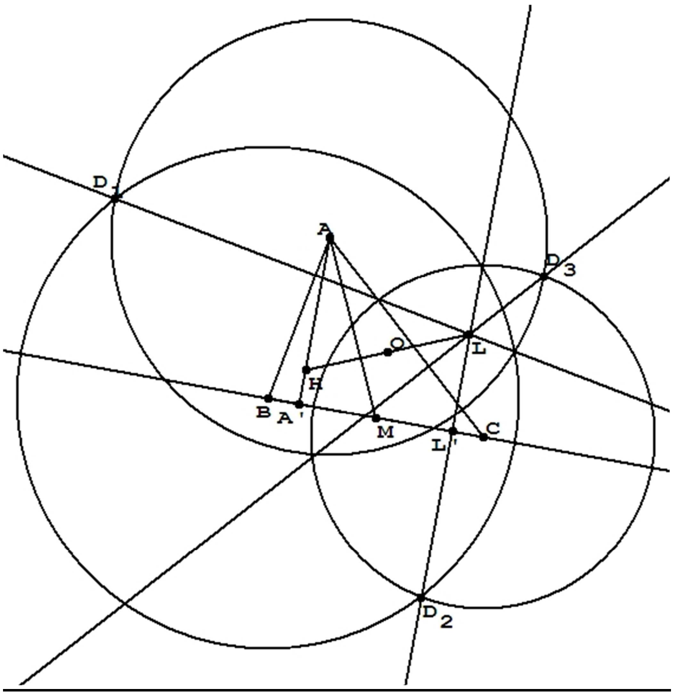
Si le triangle T n'est pas équilatéral, la droite (OH), qui est alors bien définie, contient le centre de gravité G, et cette droite (OH) est *la droite d'Euler de T.* Le résultat fondamental que nous allons établir est le suivante :

Théorème 1.2.1



Soit L le symétrique de l'orthocentre H par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle T = (ABC). Alors, le point L est le centre radical des trois cercles C(A,a), C(B,b) et C(C,c) centrés aux sommets de T et ayant comme rayons respectifs les longueurs des côtés opposés.

Démonstration :



Etant donné que H, O et L sont alignés sur la droite d'Euler dans cet ordre, la conservation du

milieu par projection orthogonale sur (BC) par exemple, assure qu'on doit avoir MA' =ML', si

on note L' le projeté orthogonal de L sur (BC). Mais comme le centre radical des trois cercles

est le seul et unique point qui se trouve sur les trois axes radicaux des cercles pris deux à

deux, le théorème revient à prouver que l'on a simultanément MA' = ML', NB'= NL'', et

PC' = PL_o , où L''(resp. L_o) est le projeté orthogonal de L sur (CA), (resp. (AB)). Et il suffira

de prouver la première de ces trois égalités, car les autres se démontrent exactement de la même manière par permutation circulaire des lettres (A,B,C), (M,N,P), (A',B',C')…Nous allons

donc démontrer que MA' = ML' (1.2.1.a).

Dans T, (AM) est le support de la médiane relative au sommet A ; donc, d'après le théorème

de la médiane, on a $b^2 + c^2 = 2MA^2 + \frac{a^2}{2}$; de là suit que $MA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ (i)

Etant donné que le triangle (MAA') est rectangle en A', si on a AA', connaissant MA, on a

du coup MA'. Or, si S désigne l'aire de T, la bonne vieille formule *« base fois hauteur »* donne

$AA'.\ a = 2S$, donc $AA' = \frac{2S}{a}$, d'où suit que $AA'^2 = \frac{4S^2}{a^2}$. Maintenant, on remonte à Héron.

D'après la formule de Héron, si on note 2p le périmètre a + b + c du triangle T, on a l'égalité :

$S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c) =$

$(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)\times(\frac{1}{16})$ donc

$16S^2 = ((b+c)^2 - a^2)\text{x}(a^2 - (b-c)^2) = -a^4 + a^2((b+c)^2 + (b-c)^2) - (b+c)^2(b-c)^2$, ou encore,

$16S^2 = -a^4 + a^2(2b^2 + 2c^2) - (b^2 - c^2)^2$; donc , le théorème attribué à Pythagore dans le triangle

(MAA') rectangle en A' donne ; $MA'^2 = MA^2 - AA'^2$, autrement dit :

$MA'^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{4S^2}{a^2} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - 16S^2}{4a^2}$, donc

$MA'^2 = (\frac{1}{4a^2}) \times (2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2) = \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2}$ (ii)

Evaluons à présent ML'; c'est la distance de M à l'axe radical des cercles (B, b) et (C,c).

En appliquant la remarque 1.1.5.1 3° , la différence des puissances de M par rapport à ces

deux cercles est, en valeur absolue, égale à 2BC×ML' ; donc on a :

$MC^2 - c^2 - (MB^2 - b^2) = 2a \times ML'$ donc vu la définition de M, $\frac{a^2}{4} - c^2 - \frac{a^2}{4} + b^2 = 2a \times ML'$,

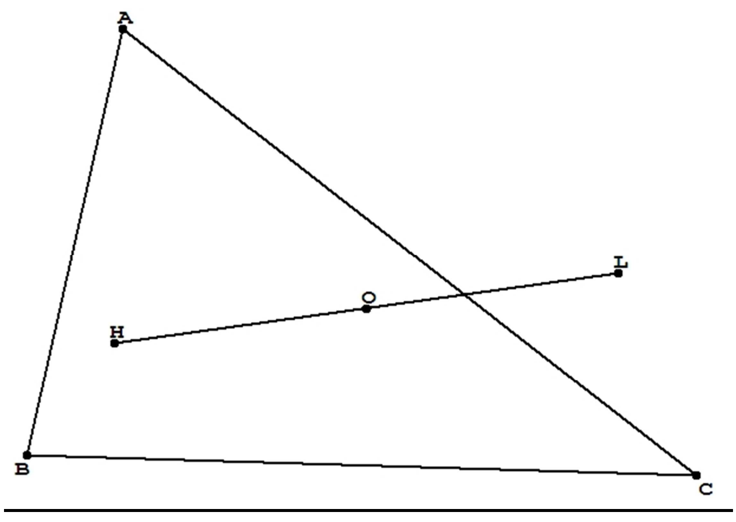
ce qui donne finalement $ML' = \frac{b^2 - c^2}{2a}$, donc $ML'^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

On a donc bien MA' = ML'(et une démarche analogue pour les autres côtés achève la preuve

du théorème

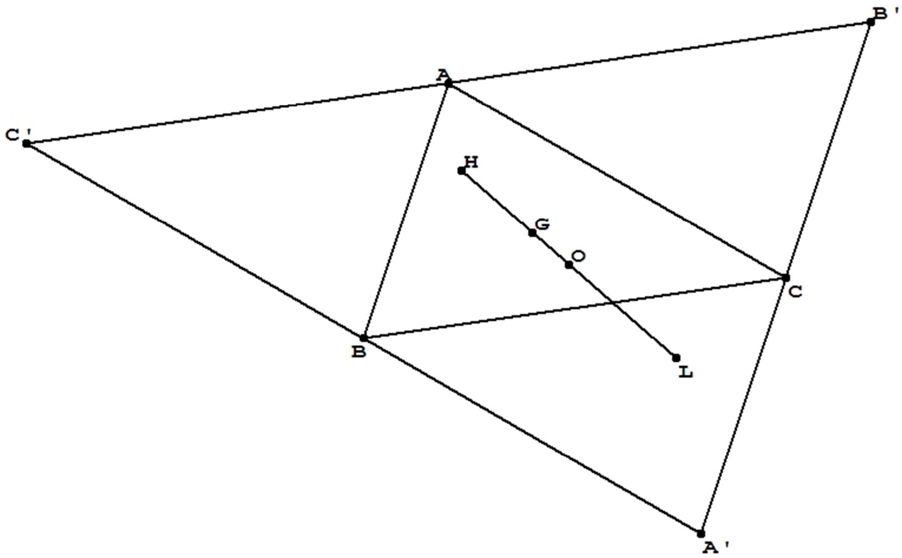
Définition 1.2.2

Le point L du théorème 1.2.1 s'appelle *le point de Delongchamps* du triangle (ABC)



Proposition 1.2.3

Le point de Delongchamps du triangle (ABC) est l'orthocentre de son triangle antimédian



Démonstration :

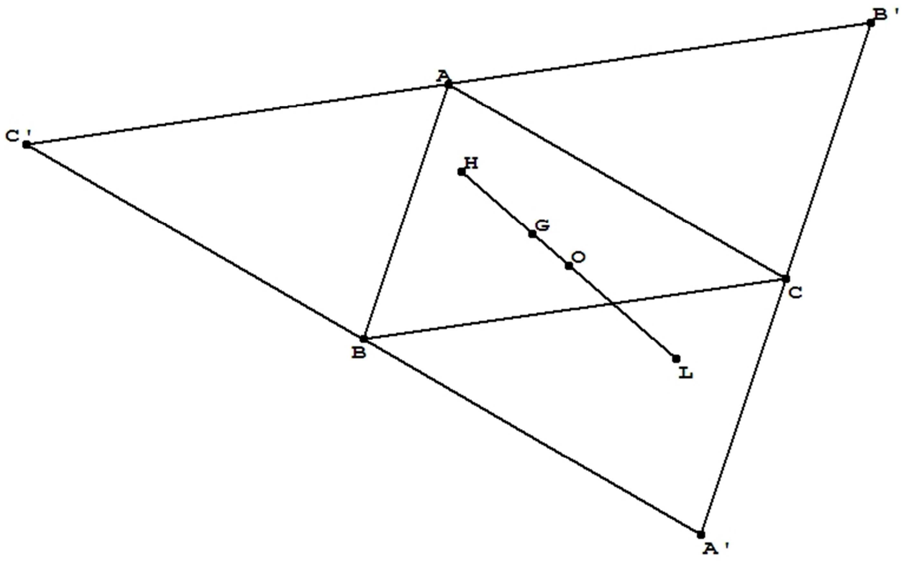
Rappel :

(1) Un triangle et son triangle médian ont le même centre de gravité

(2) Le triangle (A'B'C') est antimédian de (ABC) si le triangle (ABC) est le triangle médian de (A'B'C')

1ère démonstration : Soit (ABC) un triangle H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et (A'B'C') sont triangle antimedian d'orthocentre L. Il est question de prouver que H et L sont symétriques par rapport à O. il est évident que H est le centre du cercle circonscrit à (A'B'C'). On a alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HL}$

$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HL} \rightarrow \quad \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HL} \rightarrow \quad \overrightarrow{HO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HL} \rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{HO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HL} \rightarrow 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HL}$ CQFD

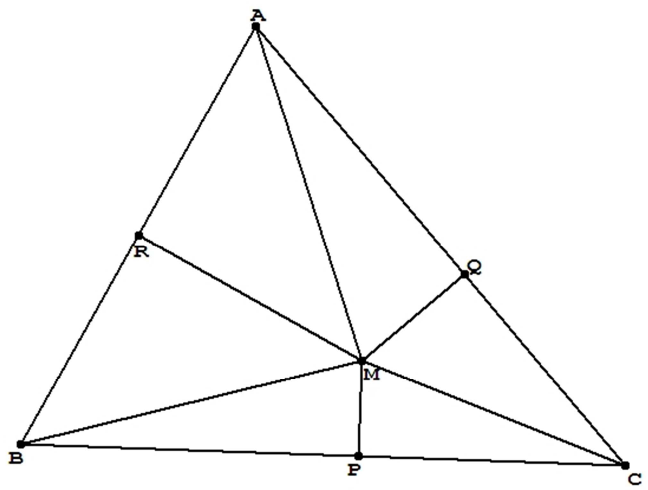


2ème démonstration : le centre du cercle d'Euler de (ABC) est le milieu du segment $[OH]$. Le cercle circonscrit à (ABC) est le cercle d'Euler de (A'B'C'), antimédian. H est le centre du cercle circonscrit à (A'B'C'). Comme O, centre du cercle circonscrit à (ABC) et centre du cercle d'Euler de (A'B'C') est le milieu de $[HL]$ car L est point de Delongchamps, alors L est l'orthocentre de (A'B'C') CQFD

2. LE THEOREME D'ERDOS-MORDELL DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

Dans son numéro de juin-juillet 1935, en rubrique *Problèmes* à résoudre, la revue *American Mathematical Monthly* publie une conjecture de Pal Erdös, mathématicien hongrois (qui deviendra de nationalité USA et transformera son prénom en Paul). Il s'écoulera deux ans avant que les mathématiciens Louis Mordell de l'université de Manchester en Angleterre et David Barrow de l'université de Georgie aux USA, proposent des solutions à ce problème. Mordell est celui qui fit de Manchester un des plus brillants centres mondiaux en théorie des nombres dont Erdös devait devenir un des maîtres incontestés dans le monde entier. Les deux solutions furent publiées dans le numéro d'avril 1937 de *l'American Mathematical Monthly.* Depuis, la conjecture est connue sous le nom de théorème d'Erdös- Mordell. Plusieurs autres démonstrations ont été données par la suite par de nombreux auteurs, notamment le soviéto-US Donnat Kazarinoff (1945). Celle que nous donnons ici est plus proche de celle publiée par l'AMM en 1958 sous la signature de Léon Bankoff (volume 65) dont elle partage des idées de départ.

<u>**Théorème d'Erdös – Mordell**</u>



Si T = (ABC) est un triangle non dégénéré quelconque dans le plan, M un point intérieur

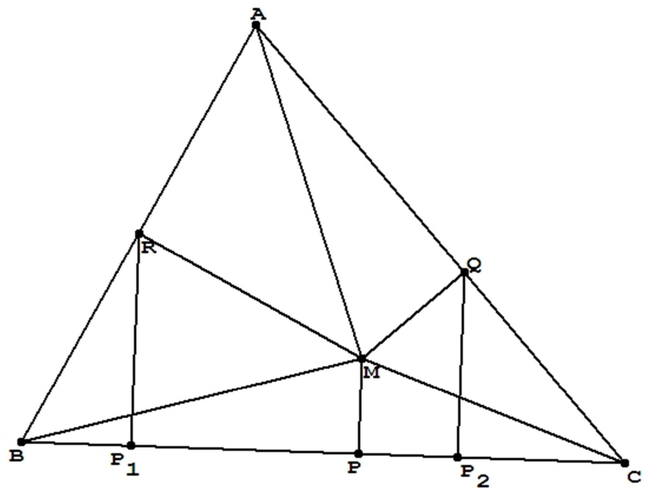
quelconque à T, et P, Q, R les projetés orthogonaux de M respectivement sur les côtés

[BC] , [CA] et [AB], alors on a toujours

MA + MB + MC $\geq$ 2 (MP + MQ + MR) et l'égalité a

lieu dans cette inégalité large si et seulement si T est équilatéral et M est son centre.

Démonstration :



Notons P_1 et P_2 les projetés orthogonaux respectifs de R et Q sur (BC). Le quadrilatère

convexe (MRBP) ayant les angles opposés en R et P droits, est inscriptible. Donc l'angle en

M dans le triangle (MRB) et l'angle en P dans le triangle (PP_1R) sont égaux comme angles

Inscrits interceptant le même arc dans le cercle (MRBP). Ces triangles étant rectangles en

R et P_1, ils sont semblables. De là résulte que $\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{P}P_1} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{PR}}$, ce qui veut dire que l'on a

PP_1 = $\frac{\mathrm{MR.PR}}{\mathrm{MB}}$ (i)

De même, le quadrilatère convexe (MQCP) est inscriptible, et on en déduit que les triangles

rectangles (MQC) et (PP_2Q) sont semblables d'où suit que $\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{P}P_2} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{PQ}}$, ce qui veut dire que $PP_2 = \frac{MQ.PQ}{MC}$ (ii)

Ceci étant, puisque P, P_1 et P_2 sont les projetés orthogonaux de (M,R, Q) sur (BC), vu que le

rapport de projection orthogonal dans le plan euclidien est, en valeur absolue, inférieur à 1

on a en raison des relations (i) et (ii) précédentes, l'inégalité large :

$MA \geq MA\frac{P_1P_2}{RQ} = MA\ [\frac{P_1P + PP_2}{RQ}] = (\frac{MA}{RQ})\ [\ (\frac{MR.PR}{MB}) + (\frac{MQ.PQ}{MC})\ ]$ (iii)

Et, par permutation circulaire des lettres (A, B, C) et (P, Q, R), on obtient de même :

$MB \geq \frac{MB}{PR}\ [\ \frac{MP.QP}{MC} + \frac{MR.QR}{MA}\ ]$ (iv)

$MC \geq (\frac{MC}{QP})\ [\ \frac{MQ.RQ}{MA} + \frac{MP.RP}{MB}\ ]$ (v)

On va ensuite ajouter membre à membre les inégalités (iii) –(v), mais dans chacune, en

Sortant MR, MQ, MP des crochets et en les y remplaçant respectivement par MA, MB, MC

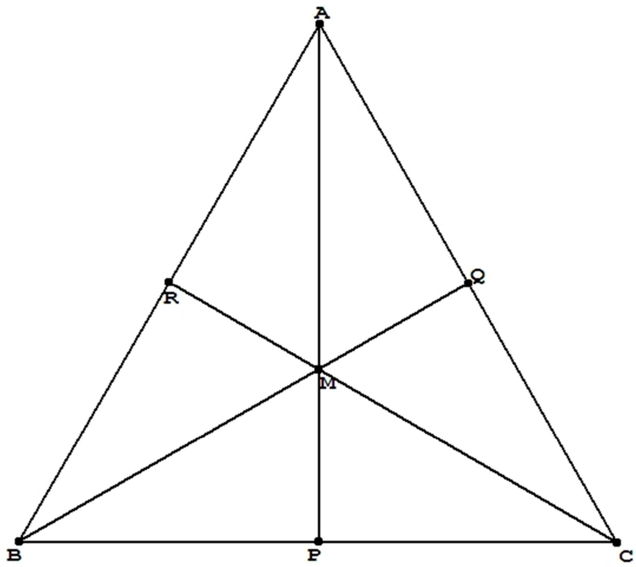
Il vient alors :

$MA + MB + MC \geq MR\ [\ \frac{MA.PR}{MB.RQ} + \frac{MB.QR}{MA.PR}\ ] + MP\ [\ \frac{MB.QP}{MC.PR} + \frac{MC.PR}{MB.QP}\ ] + MQ\ [\ \frac{MC.QR}{MA.PQ} + \frac{MA.PQ}{MC.QR}\ ]$

Or, les quantités entre crochets sont chacune de la forme $a + \frac{1}{a}$ avec $a > 0$; on a $a + \frac{1}{a} \geq 2$; donc on a :

$MA + MB + MC \geq 2\ (\ MP + MQ + MR\ )$

Cas d’égalité :



Si le triangle T = (ABC) est équilatéral avec M au centre, alors (AM), (BM) et

(CM) sont à la fois supports des hauteurs et des médianes de T, et (MP) est confondue avec (MA), (MQ) avec (MB), et (MR) avec (MC) ; donc M est le centre de gravité de ce triangle : il en résulte que MA = 2MP, MB =2MQ, MC = 2MR, d’où l’égalité en additionnant membre à membre ces trois égalités. La condition est donc suffisante.

Nous laissons le soin au lecteur de démontrer que cette condition est nécessaire.