INVERSION

A- VERSION EN LANGUE FRANÇAISE

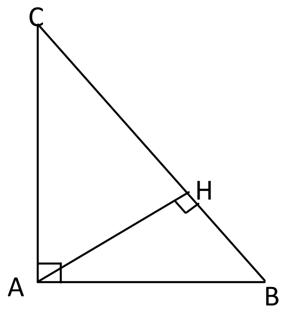
I. INTRODUCTION

L'épreuve de mathématiques au baccalauréat C-E session 2014 comportait un type non usuel de transformation plane. Contrairement aux transformations usuelles à savoir les translations, les rotations, les homothéties, les symétries et les similitudes qui conservent le barycentre et la nature des figures, cette dernière ne conserve pas le barycentre encore moins la nature des figures. Nous avons jugé nécessaire de partager sur cette application appelée **inversion** qui a la particularité de transformer certaines droites en cercles et certains cercles en droites.

II. RAPPELS

1. Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des mesures des segments qu'elle détermine sur celle-ci $AH^2 = BH.HC$.

a) <u>Illustrations</u>



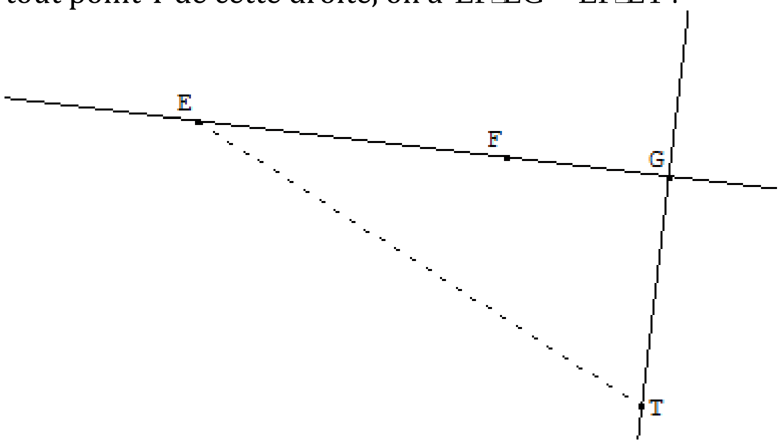
b) <u>Preuve</u>

ABC est un triangle rectangle en A. $AH^2+HB^2 = AB^2$ et $AH^2 + HC^2 = AC^2$ en additionnant membre à membre, nous obtenons $2AH^2 + HB^2 + HC^2 = BC^2$

$= (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC})^2 = 2\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC} + BH^2 + HC^2$

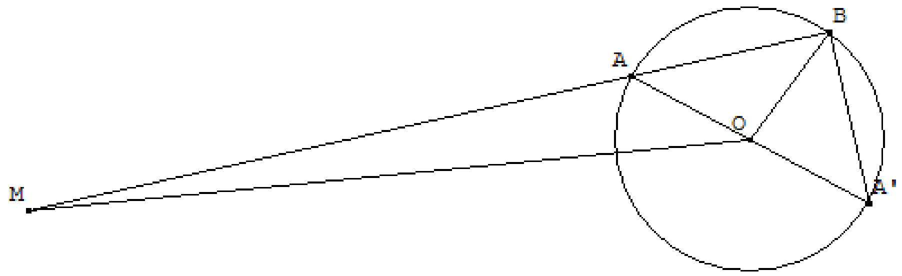
d'où ; $AH^2 = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$

2. Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
3. Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si : $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$
   Les triangles AHB et AHC sont semblables. (voir figure ci-dessus)
4. Puissance d'un point par rapport à un cercle
   M étant un point quelconque du plan et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. pour une droite passant par M et sécante au cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B, le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante choisie et est appelé puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ .on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ en effet remarquons que pour trois points alignés E, F, G et pour toute droite passant par G et perpendiculaire à la droite (EF), pour tout point T de cette droite, on a $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ET}$.

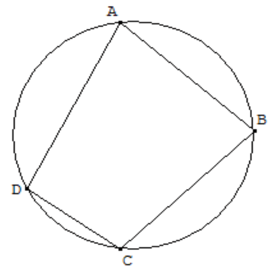


Pour la preuve de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$, considérons la droite passant par B et perpendiculaire à (AM), elle coupe le cercle en un point A'. D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$ on peut remarquer que A' est le symétrique de A par rapport à O car AA' est un diamètre du cercle et l'angle en B est droit.

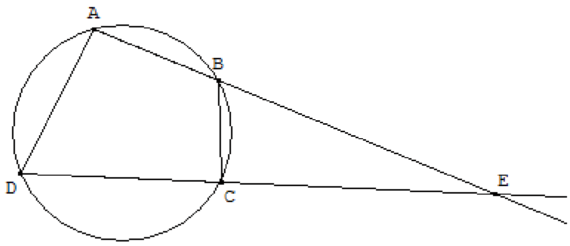
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'})\\ &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})\\ &= MO^2 - OA^2\\ &= MO^2 - r^2\end{aligned}$$



5. Quatre points A,B,C,D sont cocycliques si et seulement si ils sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible. C'est-à-dire que les angles des sommets opposés sont supplémentaires.



6. Soient A,B,C,D quatre points d'un cercle $\mathcal{C}$ tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point E on a $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED}$ Réciproquement si deux droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point E tels $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED}$ alors les points A,B,C,D sont cocycliques



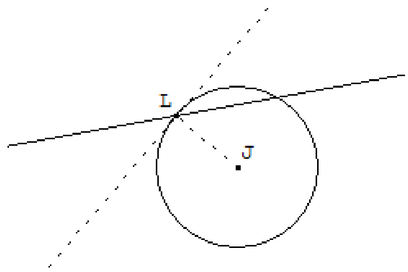
Preuve :

Supposons les points ABCD cocycliques et les droites (AB) et (CD) sécantes en E. la puissance de E par rapport au cercle étant indépendante de la sécante choisie,
on a : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED}$

Supposons $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED}$ et les droites (AB) et (CD) sécantes en E. Les triangles ECB et EAD sont semblables car en passant aux valeurs absolues ;$|\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED}|$, on a :

$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$ et ils ont un sommet commun E. De plus $\begin{cases}\text{mes}\widehat{DAB} = \text{mes}\widehat{BCE}\\ \text{mes}\widehat{ADC} = \text{mes}\widehat{CBE}\end{cases}$ les angles $\widehat{DCB}$ et $\widehat{DAB}$ sont donc supplémentaires d'où les points A,B,C,D sont cocycliques .

- L'angle d'une droite et d'un cercle est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en un des points de rencontre de celui-ci et de la droite.



III. DÉFINITIONS

<u>Définition 1</u> :Soient k un réel non nul et O un point du plan P ou de l'espace E .On appelle inversion de pôle O et de puissance k toute application f de P privé de O dans P privé de O ou de E privé de O dans de E privé de O qui à tout point M associe le point M' tel que ;

$$\begin{cases} O, M \text{ et } M' \text{ alignés} \\ \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \end{cases}$$

<u>Définition 2</u> :Soient k un réel non nul et O un point du plan P ou de l'espace E .On appelle inversion de pôle O et de puissance k toute application f de P privé de O dans P privé de O ou de de E privé de O dans de E privé de O qui à tout point M associe le point M' tel que

$\overrightarrow{OM'} = \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ Montrons que les deux définitions sont équivalentes.

O ,M,M' sont alignés donc il existe un réel ρ tel que ; $\overrightarrow{OM'} = \rho\overrightarrow{OM}$. Supposons que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=k$ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=k \Leftrightarrow \rho\overrightarrow{OM}^2 = k$. Alors $\rho = \frac{K}{OM^2}$ Par conséquent $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

Supposons que $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ on a $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \frac{K}{OM^2}.\overrightarrow{OM}^2 = k$ d'où l'équivalence.

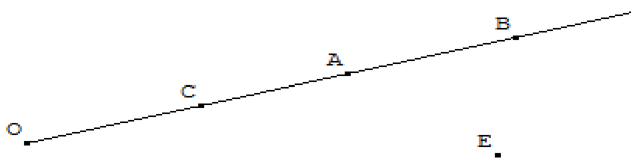
<u>Remarques</u>: Si k est positif, alors dans le plan, l'ensemble des points invariants par f est le cercle centré en O de rayon $\sqrt{k}$ appelé cercle d'inversion.

- Si un point est situé à l'intérieur du cercle d'inversion son image est à l'extérieur
- Si un point est situé à l'extérieur du cercle d'inversion son image est à l'intérieur
- Si k est positif les points M et M'sont situés du même coté de O
- Si k est négatif M et M' sont situés de part et d'autre du pôle O

IV. CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN POINT, D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

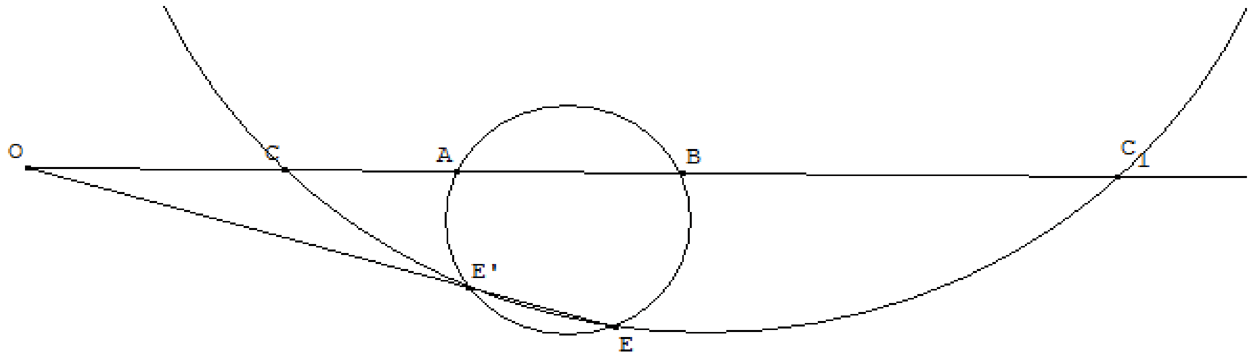
Le choix de k doit être tel que la construction d'un segment de longueur |k| soit possible.

<u>Problème</u> : f est une inversion de pôle O, de puissance p qui transforme A en B telle que indiquée sur la figure ci-dessous. Comment construire l'image d'un point ?



Construire C_1, image de C par f. puis E' image de E par f.

Nous avons $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \overline{OE}\cdot\overline{OE'}$ les points A, B, E et E' sont non alignés ; ils sont cocycliques



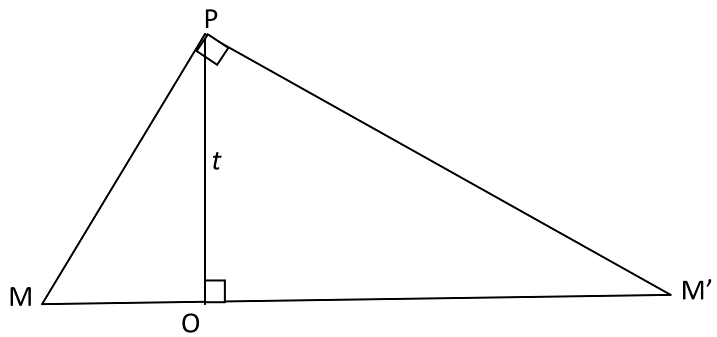
Construisons C_1 à l'aide des points C, E et E' comme ci-dessus.

a) Image d'un point

$k < 0$ posons $t = \sqrt{-k}$

Construire le segment [O P] tel que OP = t avec (OP) et(OM) perpendiculaires

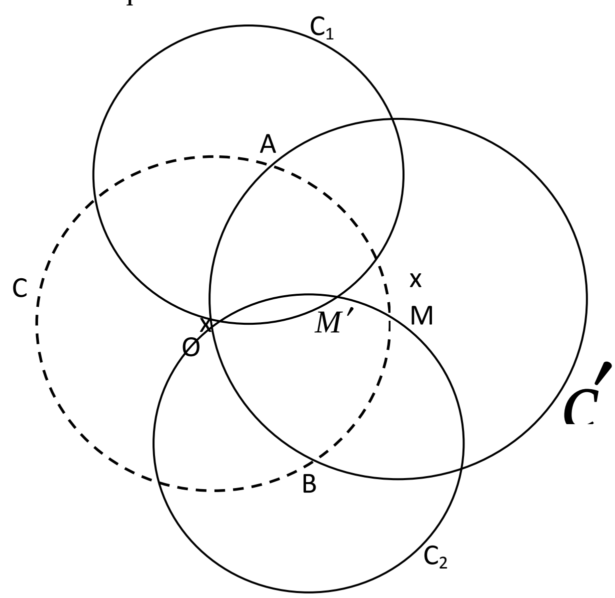
- Construire la droite (PM)
- Construire la perpendiculaire à(PM) passant par P
- Cette perpendiculaire coupe (OM) en M' et on a $(OP)^2 = OM\times OM' = -k$



K >0 On reprend la construction avec –k et le symétrique de M' par rapport à O est l'image de M par f

Construction de l'image M' de M au compas avec k positif et avec $OM > \sqrt{k}$

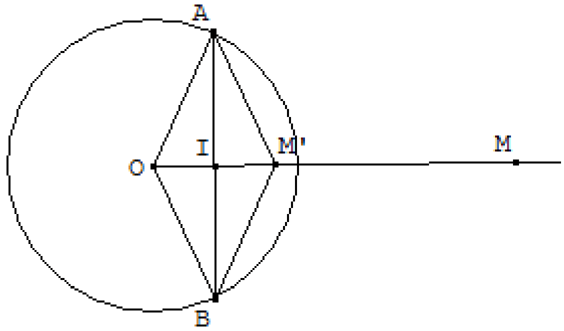
- Construire le cercle d'inversion (C)
- Prenons un point M à l'extérieur de(C)
- Construire le cercle C' de rayon OM qui coupe (C) en deux points A et B
- Construire les cercles C_1 et C_2 de centre A (Respectivement B) qui passe par O
  C_1 et C_2 se coupent en un point M' autre que O



Preuve

Montrons que M' est bien l'image de M par f en effet,

AOBM' est un losange, (OM) est la médiatrice du segment [AB] donc les points O, M, M'sont alignés.



Montrons que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} =$ OA²

On a $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OI}$ car AOBM'est un losange.

AM = OM car c'est le rayon du cercle centré en M.

Dans le triangle IMA on a : $OM^2 = IA^2 + IM^2 = IA^2+(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OM})^2=IA^2+OM^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{IO}$

Donc $2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{IO}=-(IA^2+IO^2)=OA^2$

$2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI}= (IA^2+IO^2)$ car dans le triangle OIA on a bien $OA^2 = IA^2+ IO^2$;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} = OA^2$

M' est l'image de M par l'inversion de pôle O et de puissance k = OA².

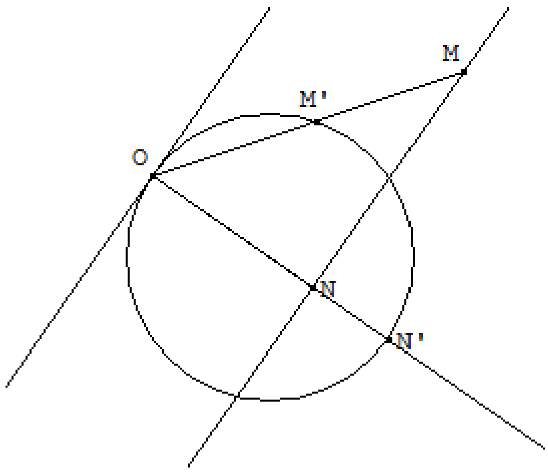
b) Image d'une droite (d)

Premier cas : La droite (d) passe par le pôle O

Si la droite (d) passe par O alors OMM' sont alignés par conséquent la droite a pour image elle même.

Deuxième cas : La droite (d) ne passe pas par O.

L'image de la droite (d) est le cercle qui passe par le pôle O dont la tangente en O est parallèle à (d).



Preuve

Soient O le pôle de l'inversion f (d) la droite considérée N le projeté orthogonal de O sur(d) N' l'image de N par f M un point de (d)et M' son image. Les triangles ONM et OM'N' sont semblables donc $\widehat{OM'N'}=\widehat{ONM}=90^0$. Quand M décrit la droite (d) M' décrit alors le cercle de diamètre [ON'].

c) Image d'un cercle

Propriété1 : Étant donné un cercle (C) et un point O situé à l'extérieur de celui-ci, de puissance p par rapport à (C), alors (C) est globalement invariant par l'inversion de pôle O et de puissance p.

Preuve. Soit M un point de (C) d'image M' par l'inversion de pôle O et de puissance p on a $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=p$; montrons que M' appartient à (C). Soit N le point de (C), aligné avec O et M on a $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=p$ (p puissance de O par rapport à(C)). O, M, M' et N sont alignés d'où M' = N.

Propriété 2 : soit f et g deux inversions de même pôle O et de puissance k et p respectivement ; avec k $\neq$p. soit F une figure quelconque du plan si f(F) = F_1 et g(F) = F_2 alors F_1 et F_2 sont homothétiques.

Preuve : soit A ∈ F. f(A) = A' équivaut à $\overline{OA}.\overline{OA'}=k$ et g(A) = A'' équivaut à $\overline{OA}.\overline{OA''}=p$. Les points O, A, A' et A'' ont alignés $\overline{OA}.\overline{OA'}=k$; $\overline{OA}.\overline{OA''}=p$ d'où $\frac{OA''}{OA'}=\frac{p}{k}$, d'où $h(O;\frac{p}{k})$ (A') = A''.

Premier cas ; Le cercle passe par le pôle O

Soit C un cercle passant par O son image par f est une droite car f est involutive. Cette droite est parallèle à la tangente à C en O.

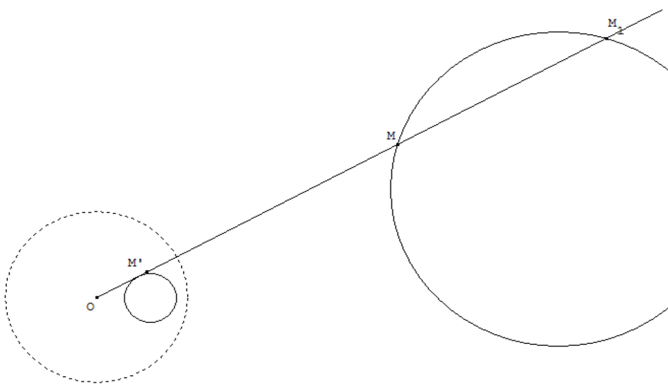
Deuxième cas ; Le cercle C ne passe pas par le pôle O

l'image du cercle C par f est le cercle C' image de C par l'homothétie de centre O et de rapport k/p. p étant la puissance de O par rapport à C.

Preuve OM.OM_1 = p Notons H = h(O, k/p) l'homothétie considérée

H (M_1) = M' ⇔ $\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p}\overrightarrow{OM_1}$

OM' = k/p OM_1 donc OM_1 = p/k OM' par conséquent OM.OM' = k . f(M) = M'.

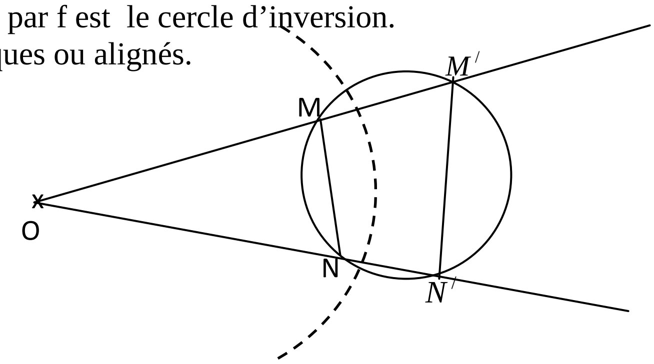


V. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'INVERSION

i- Soit f une inversion de pôle O et de puissance k. f est une application involutive
Si k est positif alors l'ensemble des points invariants par f est le cercle d'inversion.

ii- Si f(M) =M' f (N) =N' alors M NM'N' sont cocycliques ou alignés.

Preuve : voir rappel 6.



iii-Si f(M) =M' f (N) = N' alors $\frac{MN}{M'N'} = \frac{OM.ON}{k}$

Preuve.

a) Les points O,N,M,N',M' sont alignés :

$\overline{ON}.\overline{ON'} = \overline{OM}.\overline{OM'} \Leftrightarrow (\overline{OM} + \overline{MN})\overline{ON'} = \overline{OM}(\overline{ON'} + \overline{N'M'})$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{ON'} + \overline{MN}.\overline{ON'} = \overline{OM} \cdot \overline{ON'} + \overline{OM} \cdot \overline{N'M'} \Leftrightarrow \overline{MN}.\overline{ON'} = \overline{OM} \cdot \overline{N'M'}$

$\Leftrightarrow \frac{MN}{M'N'} = \frac{OM}{ON'} = \frac{OM.ON}{ON'.ON} = \frac{OM.ON}{k}$

b) Les points O,N,M,N',M' ne sont pas alignés :

$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}).\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM}(\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{N'M'})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{N'M'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{N'M'}$

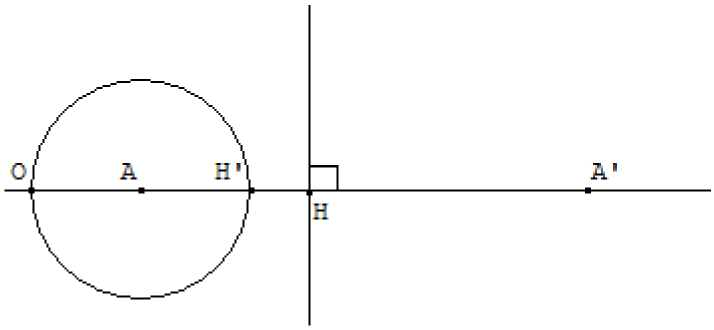
$\Leftrightarrow MN.ON\cos(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{ON}) = OM.N'M'\cos(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{N'M'}) \Leftrightarrow MN.ON = OM.N'M'$

$\Leftrightarrow \frac{MN}{M'N'} = \frac{OM}{ON'} = \frac{OM.ON}{ON'.ON} = \frac{OM.ON}{k}$

iv- Si une inversion f transforme un cercle C de centre A en une droite (d) alors A'=f(A) est le symétrique du pôle O par rapport à (d)

Preuve : A'=f(A) ⇔ OA.OA'=k

Soit H le projeté orthogonal de O sur (d)et H' son image par f. On a OH.OH' =k H' est diamétralement opposé à O donc OH'= 2OA et OA.OA'=2OH.OA par suite OA'=2OH
Les points OAA' H étant alignés A' est le symétrique de O par rapport à d



v- Soient f et g deux inversions de même pôle O et de puissances k et k' Respectivement. La composée fog est une homothétie de centre O

Preuve

Soient MM'M'' les points du plan P privé de O tels que ; g(M) = M' fog(M)= M''

g(M) = M' ⇔ $\overrightarrow{OM'} = \frac{K'}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ fog(M)= M'' ⇔ f(M') = M'' ⇔ $\overrightarrow{OM''} = \frac{K}{OM'^2}\overrightarrow{OM'}$ ⇔ $\overrightarrow{OM''} = \frac{K'}{k}\overrightarrow{OM}$

VI. EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE INVERSION DANS LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN

Soient P le plan affine Euclidien munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ f l'inversion de pôle O et de puissance k. M(x ;y) un point de P M'(x' ;y') l'image de M par f

$\overrightarrow{OM'} = \frac{K}{OM^2}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2+y^2} \end{cases}$

Montrons que l'image d'une droite (d) d'équation :y=ax+b avec b≠0 est un cercle

$$\begin{cases} x = \frac{kx'}{X'^2+y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2+y'^2} \end{cases} \qquad y=ax+b \Leftrightarrow by'^2-ky'+bx'^2+kax'=0$$

$$\Leftrightarrow (y' -\frac{k}{2b})^2+(x'+\frac{ka}{2b})^2 =(\frac{k\sqrt{1+a}}{2b})^2$$

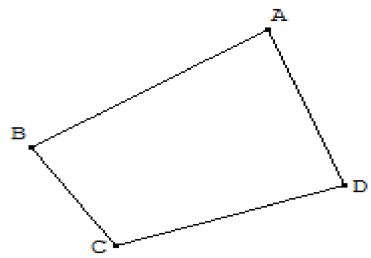
Si k>0 On a le cercle de rayon $R = \frac{k\sqrt{1+a}}{2b}$ qui passe bien par O

On peut aussi montrer que l'image d'un cercle qui passe par O est une droite

VII. QUELQUES APPLICATIONS DE L'INVERSION

a. Théorème de Ptolémée

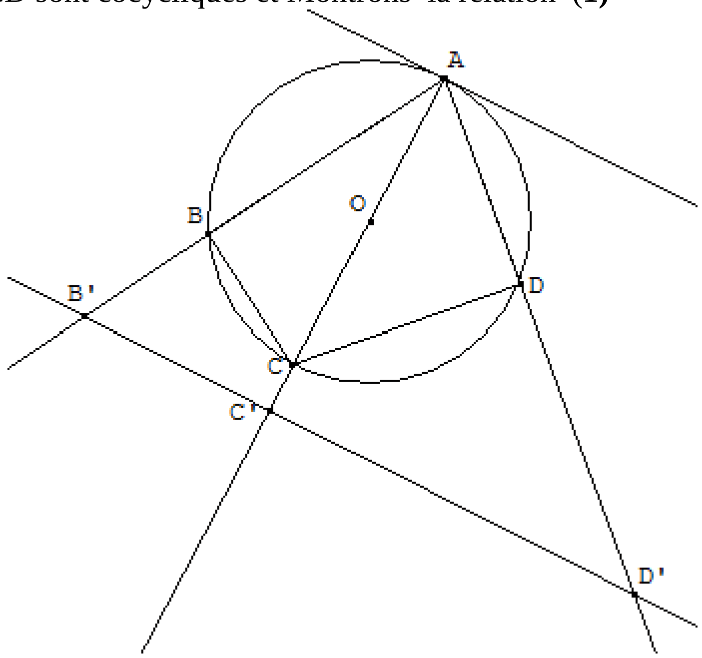
Un quadrilatère ABCD est inscriptible dans un cercle si et seulement si la somme des produits des longueurs des côtés opposés est égale au produit des longueurs des diagonales



Preuve

Montrons que ABCD est inscriptible ssi AB.DC + AD.BC= AC.BD **(1)**

Supposons que ABCD sont cocycliques et Montrons la relation **(1)**



Le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle .Considérons l'inversion de pôle A et de puissance 1

L'image de ce cercle est la droite (C'D') .On a ; C'D' + C'B' = B'D' (2)

Aussi $C'D'= \frac{CD}{AC.AD}$ $C'B' = \frac{CB}{AC.AB}$ $B'D' = \frac{BD}{AD.AB}$

En remplaçant par leur valeur (2) devient : $\frac{CD}{AC.AD} + \frac{CB}{AC.AB} = \frac{BD}{AD.AB}$ (3)

En multipliant (3) par AB.AC.AD on obtient ; AB.CD + CB.AD=BD.AC

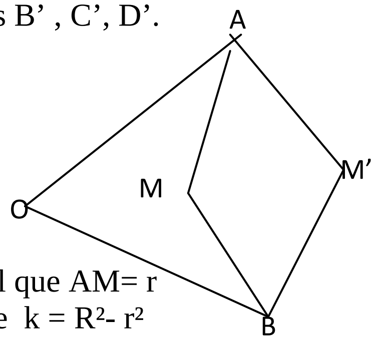
Réciproquement supposons que AB.CD + CB.AD=BD.AC et montrons que les points A B C (d)sont cocycliques

Il suffit de montrer que les points images B'C' D' par l'inversion de pôle A de puissance 1 sont alignés

On a AB.CD + CB.AD=BD.AC en divisant cette relation par AD.AB.AC on obtient

$\frac{CD}{AC.AD} + \frac{CB}{AC.AB} = \frac{BD}{AD.AB}$

donc C'D' + C'B' = B'D' ceci implique l'alignement des points B' , C', D'.



b. Inverseur de Peaucellier

C'est un dispositif mécanique qui permet de transformer un mouvement rectiligne en un mouvement circulaire et réciproquement

Soit le dispositif suivant avec OA=OB=R et AMBM' un losange tel que AM= r

Alors M' est l'image de M par l'inversion de pôle O et de puissance $k = R^2 - r^2$

<u>Preuve</u>

Soit I le centre du losange AMBM' On a : O, M et M ' alignés car ils appartiennent à la médiatrice du segment [A B] .

Il reste à montrer que OM.OM' = $k = R^2 - r^2$

OM' = OI+IM' dans le triangle OAI on a : $OA^2 = OI^2 + AI^2$ et dans le triangle AMI on a aussi : $AM^2 = MI^2 + IA^2$

$AO^2 - AM^2 = R^2 - r^2 = OI^2 - MI^2 = (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{MI})(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{MI})$

$= \overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OM'}$

c. <u>Constrution au compas du centre d'un cercle C</u>

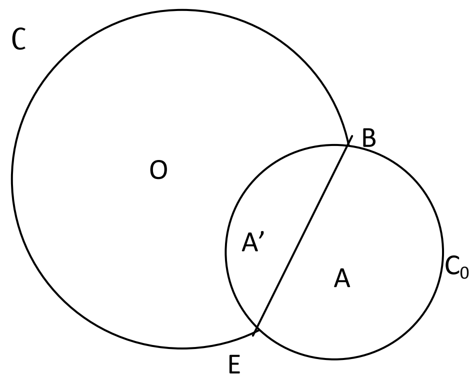
<u>Étapes de la construction</u>

1. Construire le cercle C et choisir un point A sur C .
2. Construire un cercle C_0 de centre A qui coupe C en deux points B et E .
3. Construire le symétrique A' de A par rapport à (BE) .
4. Construire l'image O de A' par l'inversion de pôle A et de cercle d'inversion C_0 O est le centre cherché.

<u>Preuve</u>

L'image de la droite (BE) par l'inversion f est le cercle C qui passe par le pôle A.

On a démontré que si une droite est transformée par une inversion f en un cercle qui passe par le pôle A alors le symétrique de A par rapport à la droite est l'image du centre du cercle .On a f(O) = A' comme f est Involutive on obtient f(A') = O.



VIII. BIBLIOGRAPHIE

– DALLE A. DEWAELE C. Géométrie plane De Boeck-Wesmael Bruxelles 1986.
– DODGE C. Euclide an Geometry and Transformations Addison-Wesley 1972.
– EIDEN J.-D. Géométrie analytique classique Calvage & Mounet Paris 2009.
– PAPELIER G. Exercices de géométrie moderne Tome VI : Inversion Vuibert Paris 1956.
– LEYS J. GHYS E. ALVAREZ A. Dimensions... une promenade mathématique DVD Lyon 2008.
– SAGEM. Inversions complexes et applications http ://www.normalesup.org/ sage/ Cours/InvComp.pdf mis en ligne le 07/10/05 consulté le 08/01/11.
– MEHL S. Chrono Math une chronologie des mathématiques http ://serge.mehl.free.fr/ date de mise en ligne non citée consulté le 08/01/11.
– BLANCHARD J-L. L’inverseur de Peaucellierhttp ://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr/french_ pdf/inverseur_de_peaucellier_pub.pdf mis en ligne en 2006 consulté le 08/01/11.
– Non cité L’inversion complexe http ://homeomath.imingo.net/inversion1.htm date de mise en ligne non citée consulté le 08/01/11.

B- **VERSION EN LANGUE ANGLAISE**

I- *INTRODUCTION*

Inversion is a transformation different from those of Euclidean Geometry that also has some useful applications.

To *invert* a number in Arithmetic means to "take its reciprocal"

The inverse of a function is that function which maps an image to its initial element.

In Inversion Geometry**,** simply referred to as *inversion*, points are transformed relative to a reference circle!

The proofs of properties demonstrated in this paper make use of similarity in triangles, Pythagoras's and Thales theorems and their converses. (The dotted circle shall be the inversion circle)

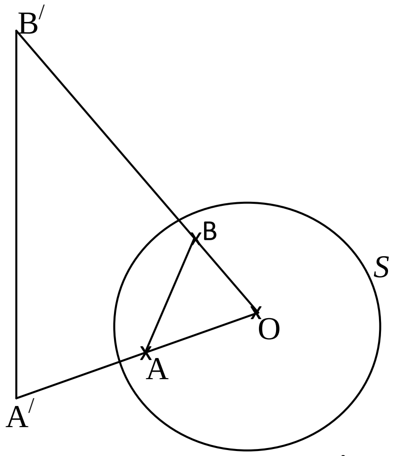
A note on similarity

Two geometric figures are said to be similar if their angles are respectively equal; (if they are equiangular). ***Corresponding sides are in constant ratio***.

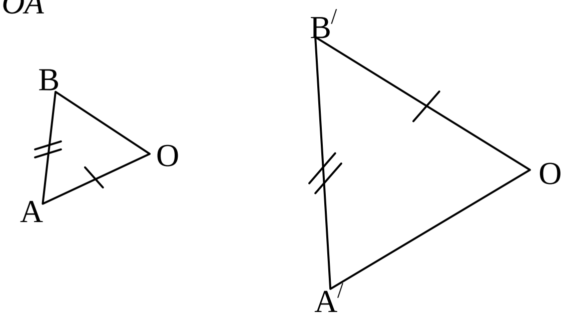
If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about these equal angles are proportional, the triangles are similar.

In the diagram, $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$ *because, having common* $\angle AOB$*, side OA correspond to side* OB' *and* $\overline{OB}$ *correspond to* $\overline{OA}'$.

Hence $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$ *(SAS)*



$$So\ \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \Rightarrow OA.OA' = OB.OB'$$



Separating the triangles **Fig 1**

Definition of inversion

An inversion in a circle, informally, is a transformation in a plane that flips the circle inside out.

Two points P and P' are said to be inverses with respect to an <u>inversion circle</u> having <u>inversion center</u> O and <u>inversion radius</u> *r* if P' is the <u>perpendicular foot</u> of the <u>altitude</u> of ΔOAP, where A is a point on the circle such that OA ⊥ AP. (*see fig 2 below)*

Consider a circle centre *O* and radius *r*. (This is the *inversion circle*. The centre *O* is the inversion centre and the radius of this circle is the inversion radius). Let *P* be any point, different from *O*, the inverse of *P* with respect to the inversion circle is a point P', lying on the ray from O through P such that $OP \times OP' = r^2$.

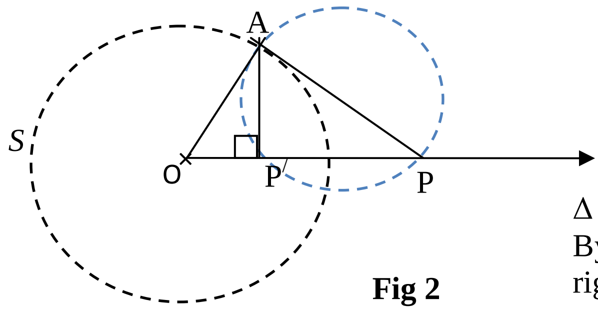


Fig 2

S is our inversion circle centre *O* and radius OA = r.
Δ OAP is right (PA $\perp$ OA at point of contact)
By construction, $AP^1 \perp OP$ so $\Delta OP^{/}A$ is also right.

Hence by similar triangles, $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OP^{/}}{OA} \Leftrightarrow OA \times OA = OP \times OP^{/}$.
But OA is radius r, hence $OP \times OP^{/} = r^2$. And so $P^{/}$ is the inverse of P
Note that the inversion that takes P to $P^{/}$ also takes $P^{/}$ back to P for P and $P^{/}$ both different from *O*.

We note that inversion can be considered an involution once we assume that the inverse of the centre O is a point at infinity. In that case, applying the same inversion twice is the identity transformation on all the points of the plane other than *O*; a function that is its own inverse. (Such can be seen in bijective functions, Multiplication by – 1, Reciprocals, Complements in set and complex conjugates)

Hence $OP \times OP^{/} = r^2 \Rightarrow OP^{/} \times OP = r^2$ ($P^{/}$ is inverse of P and P is inverse of $P^{/}$)

Note also that if $OP < r$, then $OP^{/} > r$ and vice versa. And if $OP = r$, then $OP^{/} = r$.

Such a point is an invariant point. Such a point is its own inverse.

Notice in particular that $PAP^{/}$ lies on a circle with AP as diameter.

The nearer P moves towards the pôle, O, the further $P^{/}$ moves away from O.
Actually, as P approaches O, $P^{/}$ approaches a point at infinity.
An inversion effectively turns a circle inside out (every point inside goes outside and vice versa)

II- <u>PROPERTIES OF INVERSION</u>

1. **Lines through the centre of inversion invert onto themselves but not pointwise**

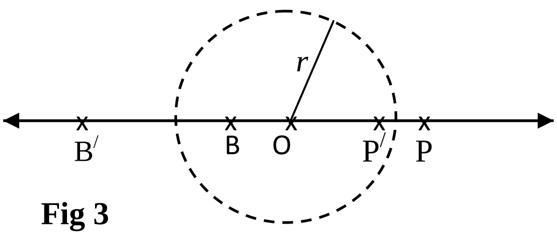


Fig 3

$B^{/}$ is the inverse of B and so must lie on ray from O through B. Hence every oint on line must have its image on the line.

2. **The inverse of a line not passing through the centre of inversion is a circle passing through the centre of inversion**

In the diagram to the right, ΔOAB is similar to $\Delta OB^{/}A^{/}$

Hence $B^{/}$ is on a circle through O and $A^{/}$ as diameter

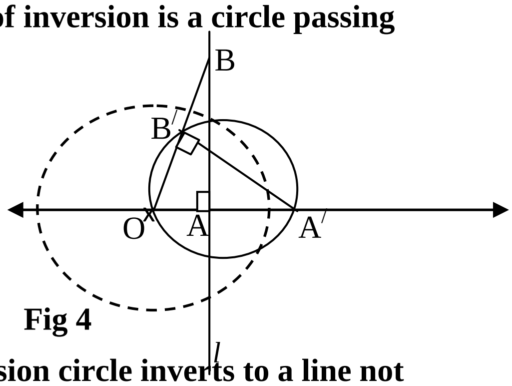


Fig 4

3. **A circle that passes through the centre O of the inversion circle inverts to a line not passing through O but parallel to a tangent to the circle at O**

Circle S inverts to line l

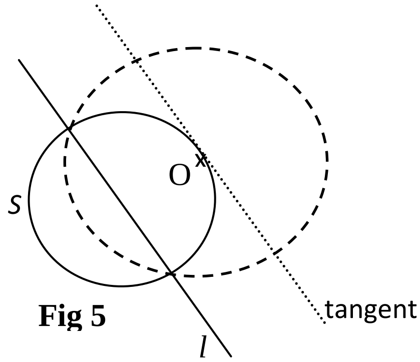


Fig 5

We shall consider the case where the circle to invert is entirely inside the reference circle.

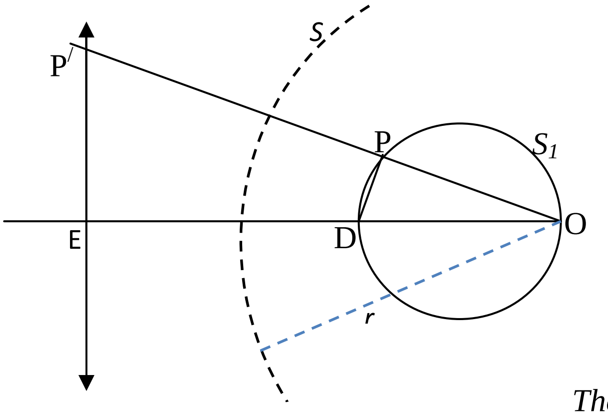


Fig 5 *bis*

S is the reference circle and S_1 is the circle to invert. OD is the diameter of S_1.

$\Delta OEP^/$ and ΔOPD share common angle O and since $O\hat{P}D$ is right and correspond to $O\hat{E}P^/$ both are right triangles.

Hence they are similar AAS. $P^/$ must thus lie on a line through $E \perp OE$

There is only one such line traced by $P^/$.

$\Rightarrow \dfrac{OP}{OE} = \dfrac{OD}{OP^/}$ *. And so* $OP \times OP^/ = OD \times OE = r^2$

4. **Circles not passing through O invert to circles not passing through O.**

There are three situations; (i) When S_1 is inside S

(ii) When S_1 is outside S *and*

(iii) When S_1 intersect S

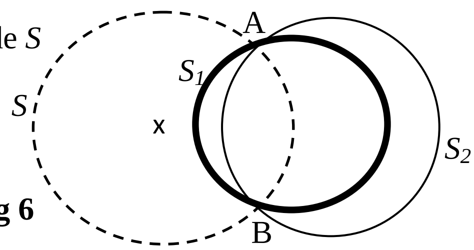


Fig 6

Circle S_1 is inverted to circle S_2.

In particular, if the circle meets the reference circle, the points of intersection are invariant.

Consider situation (i)

$\Delta OAC \sim \Delta OC^/A^/$ *and* $\Delta OBC \sim \Delta OC^/B^/$

Hence

$$\frac{OA}{OC^/} = \frac{OC}{OA^/}$$

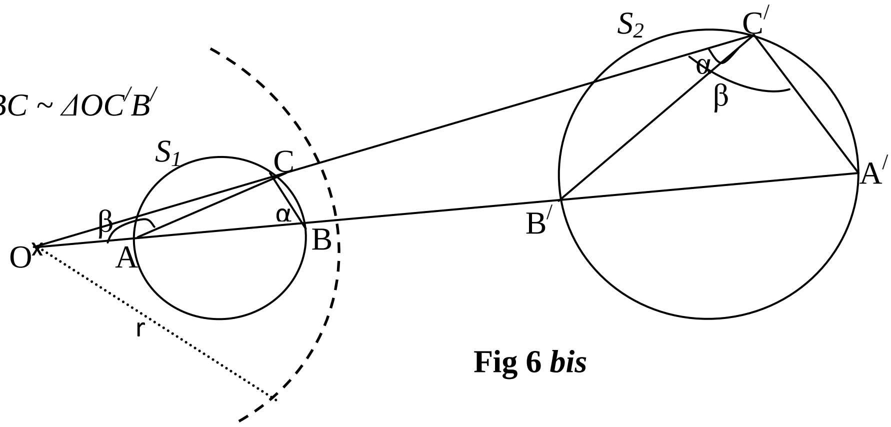


Fig 6 *bis*

($\angle OAC = \angle OC^/A^/$. *But* $\angle OAC$ (*is exterior*) $= \alpha + \angle ACB$ (*sum of interior opposite angles*)

And $\angle ABC = \angle OC^/B^/$ *since* $\Delta ABC \sim \Delta\, OC^/B^/$

Hence $\angle OAC = \angle OC^/A^/$

$\angle ABC + \angle ACB = \angle OC^/B^/ + \angle A^/C^/B^/$

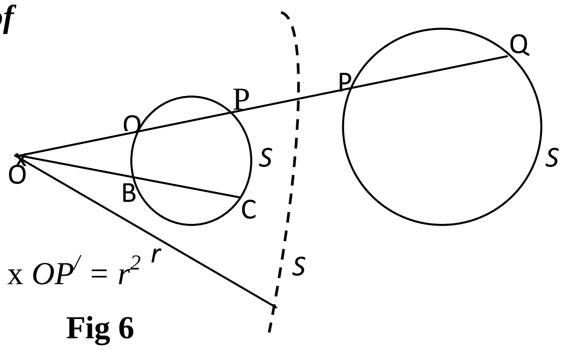
$\angle OBC + \angle ACB = \angle OBC + \angle A'C'B'$

so $\angle ACB = \angle A'C'B'$ *. And, since* $\angle ACB$ *is right, so too is* $\angle A'C'B'$)

Hence $OA \times OA^1 = OC \times OC' = OB \times OB' = r^2$.

This Means that A', B' *and* C' *are dilations of A, B and C respectively.* C' *is a dilation of the circular path traced by C and so* C' *must be tracing a circle too.*

Alternative proof



$OQ \times OQ' = OP \times OP' = r^2$

Fig 6

S_1 is the circle to be inverted while S_2 is the inverted circle. P' and Q' are images of P and Q respectively.

$$OQ' = \frac{r^2}{OQ}. \quad So \quad OQ' = \frac{r^2}{OQ} \times \frac{OP}{OP}$$

Now $OQ \times OP = OB \times OC$

Hence $OQ' = \dfrac{r^2}{OB \times OC} OP$.

This is an indication that P' *is a dilation of P with O being the centre of dilation and* $\dfrac{r^2}{OB \times OC}$ *being the dilation ratio. OB and OC have constant measure no matter the position of point P, making the dilation ratio constant.*

So the locus of Q' *is a dilation of the circular path traced by P, meaning that* Q' *too must trace a circle.*

But Q' *is the inverse of Q, which traces the same circle.*

Therefore the inverse of a circle is another circle provided it does not pass through the centre of inversion.

5. Orthogonal circles are unchanged under inversion

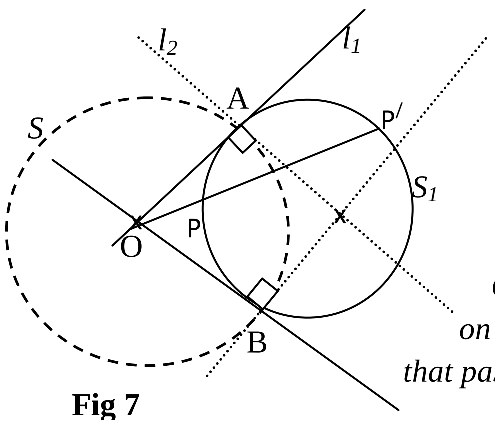


Fig 7

PP' *is a secant to* S_1*. Hence* $OP \times OP' = r^2$.

A and B are their own inverses, being invariant. Therefore P and P' *are inverses to each other. Similarly, other points are inverted to points on the same circle* S_1 .

Given the inversion circle S, and two points, A and B on S, there is one and only one circle, (a unique circle) that passes through these points that is perpendicular to S.

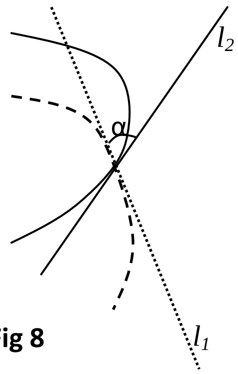
So far, we have seen that under inversion, lines map to lines or circles and circles map to circles or lines, with the result depending on whether the original object passes through the center of the inversion. Clearly, inversion cannot be an isometry since point inside the circle of inversion will become spread out over the rest of the plane when inverted.

The theorems we have seen so far also show that inversion is not a simple dilatation because lines can be inverted into circles and vice-versa.

The next best thing we can hope for is that angles are preserved by inversion. Since we know that straight lines do not necessarily invert to straight lines, we will have to re-examine what we mean by an angle between two curves. For two curves that intersect at a point P, the angle α between them at P is the angle between their tangent lines, as in Figure below.

Since there are two such angles which are supplementary, we will always choose $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

The next theorem states that angles are, in fact, preserved by inversion.



l_1 and l_2 are tangents to curves and angle between them is α

Fig 8

6. The magnitude of the angle between two intersecting curves is not changed by an inversion.

Remark: Notice that there are two angles between the two curves. If one of the angles is δ, the other is $180^{o} - \delta$, so we can always choose the

angle δ to be an acute (or right) angle.

Proof.

Let C be a circle with O as its center. Take two curves, C_1 and C_2, which intersect at a point P. Let C_1', C_2' be the images of C_1, C_2, respectively, under inversion in C, with P' the inverse of P. Take a line through O that intersects both C_1 and C_2, and denote the points of intersection as M and N, respectively.

Let M' be the inverse of M and N' be the inverse of N under inversion in C. Note that M' ,N' also lie on the line OM.

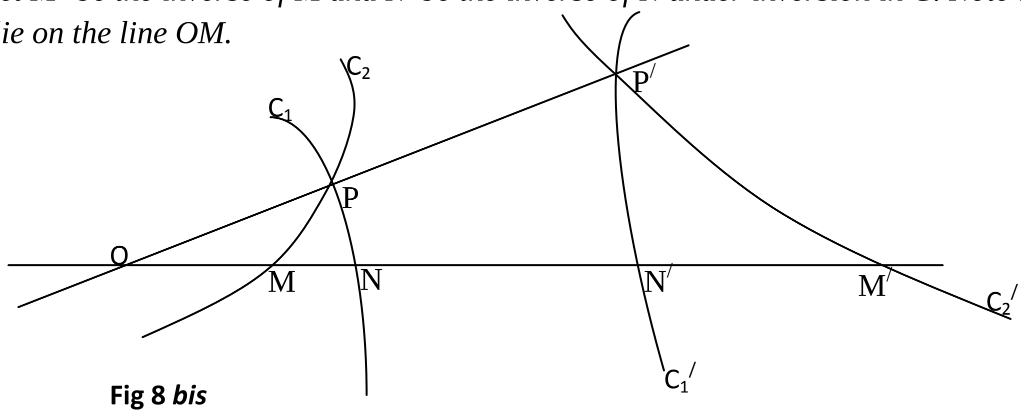


Fig 8 *bis*

We have shown earlier that ΔOPM and $\Delta OM'P'$ are similar. Therefore, $\angle OMP = \angle OP'M'$. Similarly, ΔONP and $\Delta ON'P'$ are similar, so that $\angle ONP = \angle OP'N'$. Since $\angle OMP$ is an exterior angle in ΔOMP, it is the sum of the two interior angles $\angle MPN$ and $\angle ONP$. Consequently,

$$\begin{aligned}\angle MPN &= (\angle MPN + \angle ONP) - \angle ONP\\ &= \angle OMP - \angle ONP\\ &= \angle OP'M' - \angle OP'N'\\ &= \angle M'P'N'.\end{aligned}$$

As we let the line OM approach the line OP, M and N will tend to P, and M' and N' will tend to P'. In addition, the secants PM and PN will limit to the tangents of C_1 and C_2, respectively. Likewise, $P'M'$ and $P'N'$ will limit to the tangents of C_1' and C_2', respectively. The equality of the angle between the secants holds as we approach this limit, so that the angles between the tangent lines are also equal.

We note that although the angles are not changed, their sense is however, reversed since the orientation of points is changed!

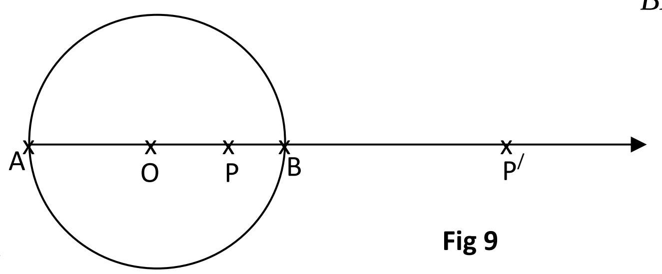
III- APPLICATION OF INVERSION

There are many interesting applications of inversion. In particular there is a surprising connection to the Circle of Apollonius. There are also interesting connections to the mechanical linkages, which are devices that convert circular motion to linear motion. Finally, as suggested by the properties of inversion that we discovered, there is a connection between inversion and isometrics of the Poincaré Disk. In particular, inversion gives us a way to construct "hyperbolic reflections" in h-lines. We will highlight only some of these applications here.

1. Apollonius' Circle and inversion in the context of magnets

When a magnet is placed under a piece of paper and iron fillings sprinkled on top, the fillings line up along circles passing through two points, (the N and S pôles). These are magnetic lines of force which we use the theory of magnetism to study equipotential lines which are orthogonal to the magnetic lines of force.

Theorem. Given P and P' which are inverse points with respect to a circle C and lie on the diameter $\overline{AB}$ of circle C, then $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AP'}{BP'}$.



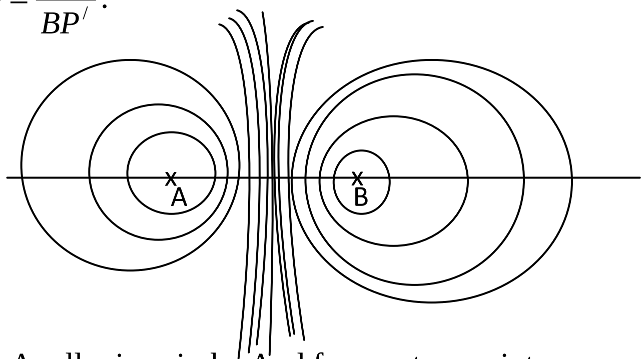


Fig 9

Consider two points A and B and some constant *k*.
The locus of some point P such that AP = k(BP) is an Apollonian circle. And for any two points there are infinitely many Apollonian circles. In particular, when *k* = 1, the circle become a line which is the perpendicular bisector of AB. Each of the circles divides AB harmonically.

Proof: *Since P and P' are inverses, $OP.OP' = OB.OB$ or* $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{OB}{OP'}$

Check that $\dfrac{OP+OB}{OP-OB} = \dfrac{OB+OP'}{OB-OP'}$ *or* $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AP'}{BP'}$.

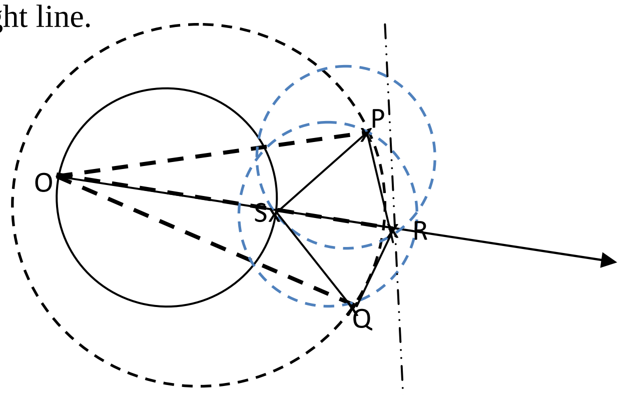
Apollonius' problem actually, is to construct a circle tangent to three given circles; the three circles may not intersect and may have different radii. (The problem is impossible in the case of concentric circles. But where possible, there are eight different such circles that are tangent to all three.

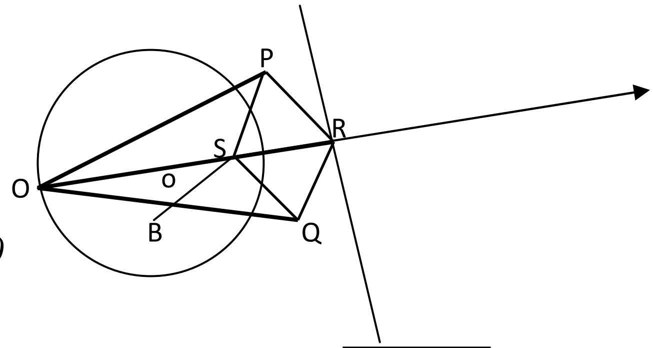
2. Peaucellier's Linkage

In 1864, a French engineer and army captain Charles- Nicolas Peaucellier was able to use the properties of inversion to construct a mechanical devise that converts rotational motion to linear motion as can be seen in very many settings such as rolling down the window of a car.

PR = RQ = QS = SP.

OP, OR, OS and OQ are rods held at O by hinges such that P, Q, R, and S move freely. As S moves around a circle, R traces a straight line.





We have $OS.OR = (OM - MS)(OM + MR)$

$= (OM - MS)(OM + MS)$

$= OM^2 - MS^2$

$= OP^2 - PM^2$

$= (OP^2 - PM^2) - (PS^2 - PM^2)$

$= OP^2 - PS^2$

OP and PS are fixed so R is the inverse of S in the inversion circle of radius $\sqrt{OP^2 - PS^2}$ *through O. And we know the inversion of a circle through the centre of inversion is a straight line.*

Hence as S traces a circle through O, R traces a line. This is achieved by adding a bar BS and fixing B at a point such OB = BS.

REFERENCES

1) Kenji Kozai, Shlomo Libeskind: *Circle Inversion and applications to Euclidean Geometry*

2) Marvin Jay Greenberg: *Euclidean and Non Euclidean Geometries*

3) Paul Kunkel: *Whistler Alley Mathematics*

All of these are Wikipedia links and Wolfram web resources.