LIEUX GEOMETRIQUES ET TRANSFORMATION DU PLAN

Sommaire

INTRODUCTION:

1- Préliminaire :

Lors du FOGEL édition 2014, l'un des thèmes était intitulé lieux géométriques. Il était question de l'étude des lieux géométriques usuels. Pour l'édition 2015 on donne une figure et on suppose qu'un point M de celle-ci décrit un ensemble donné. Un autre point N lié à M se déplace également. Le problème est de savoir quel ensemble décrit le point N. C'est cet ensemble qu'on appelle le lieu géométrique du point N. Si f est l'application qui à tout point M associe le point N, alors chercher le lieu de N c'est chercher l'image par f de l'ensemble décrit par M. L'une des problématiques c'est rechercher l'application f.

2- Quelques définitions :

Lieu géométrique : Ensemble de points satisfaisant certaines conditions données ou ensemble de points vérifiant une propriété donnée.
Cet ensemble peut être réduit à l'ensemble vide, à un point ou à une infinité de points.
Transformation du plan: Bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire que tout point du plan possède une image unique et un antécédent unique. Exemple : translation, homothétie, rotation, symétrie, similitude etc.

I- RECHERCHE DE QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

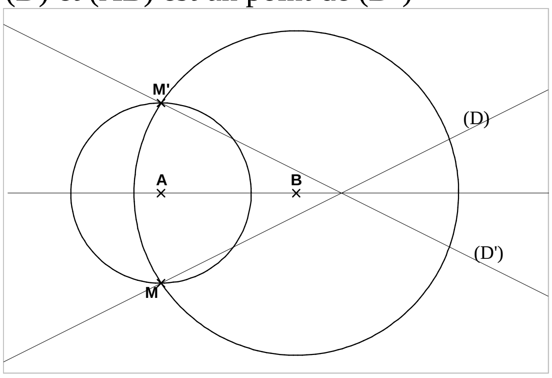
Activité 1 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une symétrie orthogonale.

Enoncé : Soit (D) une droite, A et B deux points extérieurs à cette droite, à tout point M de (D), on associe le point M', second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle de centre B et de rayon BM. Déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque le point M décrit la droite (D).

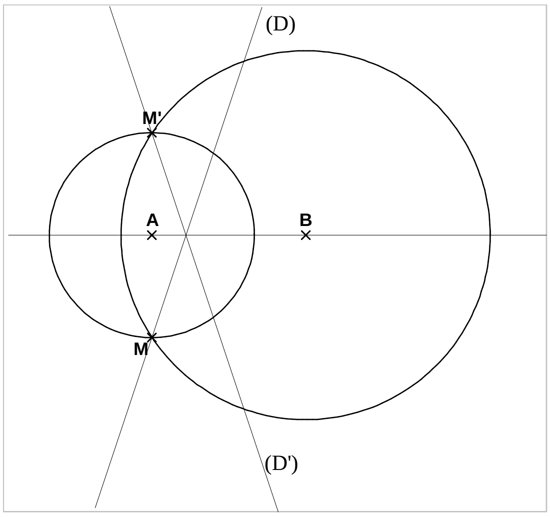
Solution :
Lieu géométrique des points M' lorsque M décrit la droite (D)
AM = AM', BM= BM' donc (AB) est la médiatrice de [MM']. M'est alors l'image de M par la symétrie S d'axe (AB).
Ainsi lorsque M décrit la droite (D), M' décrit l'image de (D) par la symétrie d'axe (AB).

Conclusion : Le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit la droite (D) est la droite (D') symétrique de (D) par rapport à (AB).

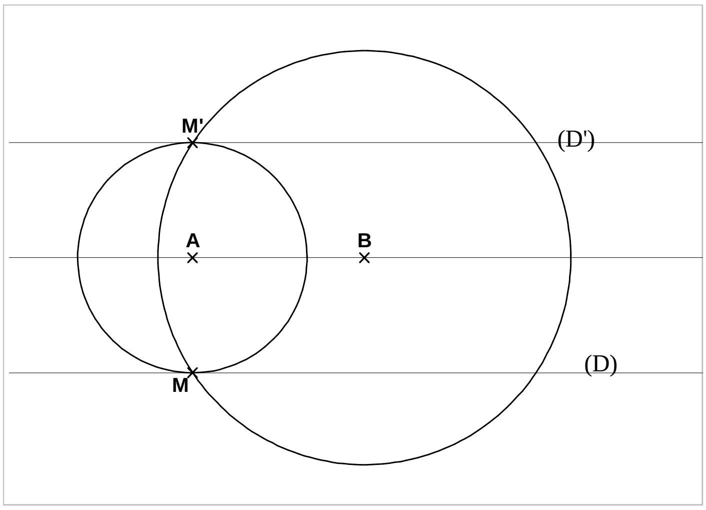
Construction de (D')
a) Cas où A et B sont dans un même demi-plan de frontière la droite (D) avec (AB) et (D) non parallèles.
Le point d'intersection de (D) et (AB) est un point de (D')



b) Cas où A et B sont de part et d'autre de (D).



c) Cas où les droites (AB) et (D) sont parallèles.



Activité 2 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une rotation.

Enoncé : Soit (D) une droite fixe du plan et un point A n'appartenant pas à (D).
Pour chaque point M de la droite (D), on considère les cercles (C_1) de centre M passant par A et (C_2) de centre A passant par M.
Quels sont les lieux géométriques (L_1) et (L_2) des points M_1 et M_2, intersections de ces deux cercles ?
Les triangles AMM_1 et AM_2M sont de sens direct.

Solution:
Lieu géométrique de M_1 et M_2 intersections de (C_1) et C_2)
(C_1) et C_2) sont des cercles de rayon AM, donc les triangles AMM_1 et AM_2M sont équilatéraux.

$\text{Mes}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_1}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et $AM_1 = AM$, $AM_2 = AM$

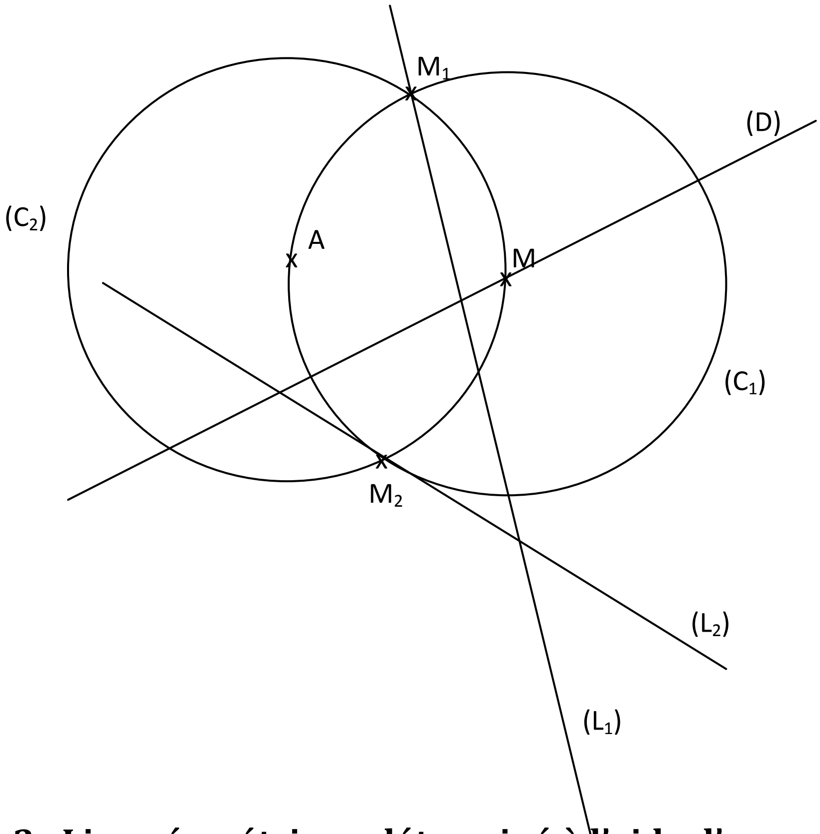
Donc M_1 est l'image de M par la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

M_2 est l'image de M par la rotation r_2 de centre A de l'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Ainsi lorsque M décrit (D), M_1 décrit l'image de (D) par la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Lorsque M décrit (D), M_2 décrit l'image de (D) par la rotation r_2 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Conclusion : (L_1) est l'image de (D) par r_1 et (L_2) est l'image de (D) par r_2.



Activité 3 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une symétrie centrale.

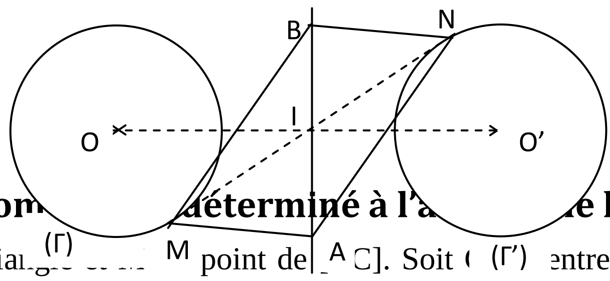
Enoncé : On considère un cercle (Γ) de centre O et M un point de ce cercle. Soit A et B deux points distincts tels que la droite (AB) n'ait aucun point commun avec (Γ).

1- Construire le point N tel que NBMA soit un parallélogramme.
2- Quel est le lieu du point N lorsque M décrit le cercle (Γ).

Solution

1) Construction de N (voir figure)
2) Lieu des points N lorsque M décrit le cercle (Γ)
   Soit I milieu de [AB], I est aussi le milieu de [MN]
   Donc N est l'image du point M par la symétrie S_I de centre I.
   Lorsque M décrit (Γ), N décrit l'image de (Γ) par S_I.
   Soit (Γ') cette image de (Γ) par S_I
   O' centre de (Γ') est l'image de O par S_I
   O' = S_I (O) donc I milieu de [OO']. (Γ) et (Γ') ont même rayon.

Conclusion : Le lieu de N lorsque M décrit le cercle (Γ) est le cercle de centre O', de même rayon que le cercle (Γ).



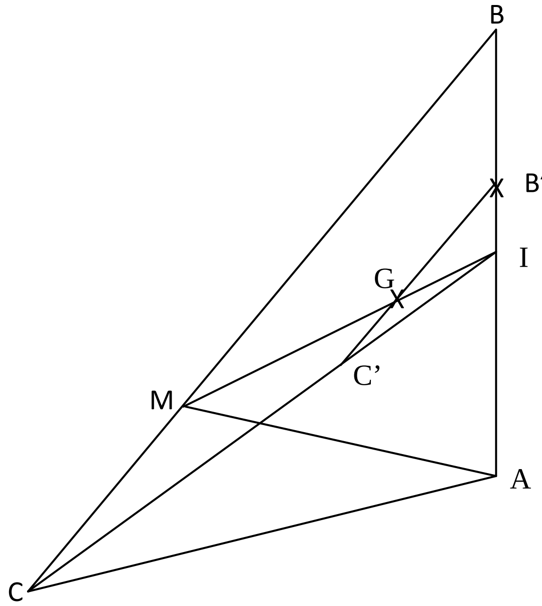
Activité 4 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une homothétie

Enoncé : ABC est un triangle et M un point de [BC]. Soit G le centre de gravité du triangle ABM. Déterminer le lieu géométrique de G lorsque M décrit le segment [BC]

Solution :

G le centre de gravité de ABM, soit I le milieu du segment [AB] ; $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$

Donc le point G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$
Ainsi lorsque M décrit [BC], G décrit l'image de [BC] par h.
Soit B' = h(B) et C' = h(C) On a $\overrightarrow{IB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.
Conclusion : Le lieu géométrique de G lorsque M décrit le segment [BC] est le segment [B'C']



Activité 5 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une composée d'homothétie et translation.

Énoncé : On considère deux points A et B. pour tout point M du plan, soit I le milieu de [AM] et G le barycentre de (A, -1) ; (B, 2) et (M, 1).

1- Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB].
2- Déterminer le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB].

Solution:

1) Lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]

I milieu de [AM] donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, I est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Par cette homothétie, A est invariant, le point B a pour image K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc K est le milieu de [AB].
I étant l'image de M par h lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB], I décrit le cercle de diamètre [AK].

Conclusion : Le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] est le cercle de diamètre [AK] avec K milieu de [AB]

2) Lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB]

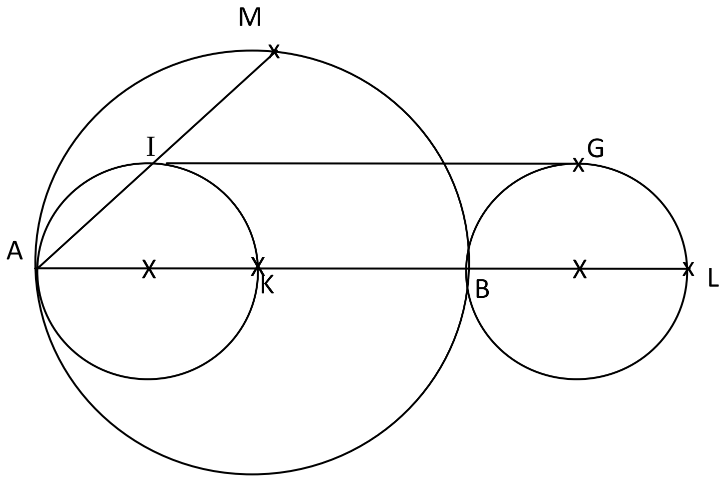
$-\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ainsi $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

D'autre part I milieu de [AM] on a $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AI}$.

BGIA est un parallélogramme ainsi $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AB}$ donc G est l'image de I par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Par cette translation t, le point A a pour image B et le point K a pour image L tel que $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AB}$.
G étant l'image de I par t, lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB], I décrit le cercle de diamètre [AK] et G décrit le cercle de diamètre [BL]

NB : I est l'image de M par h (A, $\frac{1}{2}$) et G est l'image de I par t ainsi G est l'image de M par t∘h, quand M décrit le cercle de diamètre [AB], G décrit l'image de ce cercle par la transformation t∘h. Ainsi le cercle de diamètre [BL] est l'image du cercle de diamètre [AB] par t∘h.

Conclusion : Le lieu géométrique de G est le cercle de diamètre [BL].



Activité 6 : Lieu géométrique déterminé à l'aide d'une similitude directe.

Énoncé : Soit (D) une droite et A un point n'appartenant pas à (D). M étant un point de (D), on désigne par N le point de (D) tel que $Mes(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{6}$ et H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle AMN. Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M décrit (D).

Solution :

$Mes(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AM$

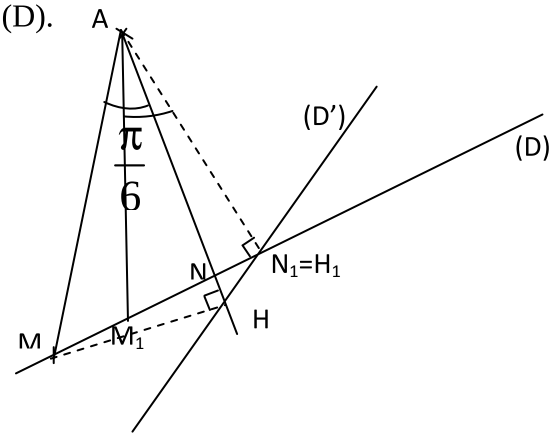
$Mes(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AH}) = Mes(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{6}$ $\quad \begin{cases} Mes(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AH})=\frac{\pi}{6} \\ AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AM \end{cases}$

H est donc l'image de M par la similitude directe S de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Lorsque M décrit (D), H décrit (D') image de (D) par la similitude directe S de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Conclusion : Le lieu géométrique de H lorsque M décrit (D) est l'image de (D) par S.

Construction de (D') :

Pour le cas où N est le projeté orthogonal de A sur (D), alors H et N seront confondus et l'image de M par S n'est que ce projeté orthogonale de A sur (D); donc (D) est une droite passant par H et par le projeté orthogonal de A sur (D).



II- QUELQUES EXERCICES DE RECHERCHE

Exercice 1 : (D) est une droite fixe. A et B sont deux points fixes non situés sur (D). On note C le symétrique de A par rapport à un point M de (D). Le point M décrit (D).

1- Quel est le lieu géométrique du milieu E de [AM] ?

2- Quel est le lieu géométrique de C ?

3- Soit O le milieu de [AB], déterminer le lieu géométrique de K point d'intersection des droites (BM) et (CO).

Exercice 2 : (C) est un cercle de centre O, de diamètre [AB]. M est un point de (C), (Δ) est la tangente en M à (C). La parallèle à la droite (AM) menée par O coupe (Δ) en N. Quel est le lieu géométrique des points N lorsque M décrit (C)?

Exercice 3 : (C) est un cercle, A et B deux points de (C) distincts non diamétralement opposés. A tout point M du grand arc $\overset{\frown}{AB}$, privé du point B, on associe le point N de la demi-droite [BM) tel que 3 AM = BN.

Déterminer le lieu de N lorsque M décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de B.

III- DOCUMENTATION

- Mathématiques 1ére SM CIAM
- Mathématiques Tle SM CIAM
- MATH Terminale S spéciale Transmath NATHAN
- www.google.com